

LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN LAS ENSEÑANZAS OBLIGATORIAS Y EL BACHILLERATO

Mireia López Beltrán (Coordinadora)¹, Lluís Albarracín Gordo²,
Irene Ferrando Palomares³, Jesús Montejo-Gámez⁴, Pedro Ramos Alonso⁵,
Ana Serradó Bayés⁶, Elena Thibaut Tadeo⁷,
Raquel Mallavibarrena (Coordinadora de los dos bloques de educación)⁸

1: Universitat Politècnica de Catalunya

2: Universitat Autònoma de Barcelona

3: Universitat de València

4: Universidad de Granada

5: Universidad de Alcalá

6: Colegio La Salle-Buen Consejo de Puerto Real

7: CEFIRE-CTEM y Universitat de València

8: Universidad Complutense de Madrid

El compromiso de la Real Sociedad Matemática Española (RSME) con la educación matemática se caracteriza por tener entre sus fines el fomento de la enseñanza matemática en los diferentes niveles educativos: infantil, primaria, secundaria, formación profesional y universidad. En palabras de su presidente, Francisco Marcellán: “Las Matemáticas son una materia central en todos los sistemas educativos del mundo por dos razones: primero, por su carácter formativo y segundo, por su carácter instrumental, que se modela en crecientes aplicaciones en muy diversos ámbitos del conocimiento y del desarrollo de un país” (2017). En este capítulo se abordarán las etapas de educación primaria y secundaria y la formación inicial en el Grado de Educación Infantil y Primaria. La perspectiva de género (que cuenta con capítulo propio en este Libro Blanco) se ha tenido en cuenta de manera integrada en esta parte de educación por su especial importancia.

El presente capítulo pretende abordar el proceso de enseñanza-aprendizaje en su globalidad y cubrir sus diferentes aspectos. Para ello, se divide en tres partes, se empieza por centrar la mirada en el proceso de aprendizaje a partir de

los currículums¹ y su evolución en estos últimos años. En la segunda parte, y de manera conjunta para las dos etapas, se tratan las estrategias de enseñanza-aprendizaje con especial interés en la resolución de problemas, la modelización, la perspectiva STEAM (*Science, Technology, Engineering, Arts y Mathematics*) y las herramientas TIC. Esta segunda parte se completa con una mirada a la evaluación competencial del alumnado y al proceso reflexivo del profesorado en la búsqueda de la mejora continua de su labor docente. La tercera y última parte centra el foco en el personal docente: en su formación inicial (en los grados de Educación Infantil y Primaria) y en su desarrollo profesional (la formación permanente y continua).

1. EL PROCESO DE APRENDIZAJE

1.1. Educación matemática en la educación primaria

La falta de estabilidad normativa de nuestro sistema educativo se refleja también en la etapa de educación primaria. Si se limita a este siglo, la LOCE² entró en vigor en el año 2002, fue sustituida por la LOE³ en el 2006 y, finalmente, por la LOMCE⁴ en el 2013. La organización general de la etapa de primaria, con una duración de seis cursos, se ha mantenido estable. El principal cambio ha sido la desaparición de la estructura por ciclos: tanto la LOCE como la LOE organizaban los seis cursos de primaria en ciclos de dos cursos, y fijaban objetivos y contenidos en cada uno de esos tres ciclos. En la LOMCE se cambió a la organización en seis cursos, si bien en la orden ministerial correspondiente se fija el currículo de toda la etapa de primaria, y se deja en manos de las comunidades autónomas la distribución de contenidos en los seis cursos de la etapa. Esto ha provocado que aparezcan diferencias entre los diseños curriculares de diferentes comunidades. Este hecho, junto con la aplicación o no de las pruebas externas que introdujo la ley, hace que sea

¹ Regulación de los elementos que determinan los procesos de enseñanza y aprendizaje para cada una de las enseñanzas. El currículo estará integrado por los siguientes elementos: los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa, las competencias, los contenidos, la metodología didáctica, los estándares de aprendizaje evaluables y los criterios de evaluación.

² Ley Orgánica de Calidad de la Educación (LOCE), Ley Orgánica 10/2002.

³ Ley Orgánica de Educación (LOE), Ley Orgánica 2/2006.

⁴ Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa, Ley Orgánica 8/2013.

cada vez más difícil describir la situación de la enseñanza de las Matemáticas en Educación Primaria (EP) en España, ya que existen diferencias relevantes entre comunidades.

Para contextualizar la situación española a nivel internacional, la herramienta fundamental es el estudio TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*), una prueba muestral organizada por la IEA (*International Association for the Evaluation of Educational Achievement*) cuyo universo de estudio es el alumnado de 4º de primaria y de 8º de educación obligatoria. Nuestro país ha participado en los estudios de los años 2011 y 2015 en la prueba correspondiente a 4º de primaria (hubo una participación en el estudio de 1997, en el nivel que entonces correspondía con 8º EGB, pero la falta de continuidad hace difícil poder extraer alguna información de ella). Los resultados de España en el estudio de 2011 no fueron buenos, y se situaron por debajo de la media. En concreto, de los países desarrollados, fueron los peores, junto con los de Polonia y Rumanía. El análisis fue muy amplio y participaron también numerosos países en vías de desarrollo.

En el estudio de 2015 se produjo una ligera mejoría, aunque se sigue a la cola de Europa. De un total de 25 países europeos participantes, los 505 puntos del resultado de España solo están por delante de los 502 de Croacia, los 499 de Eslovaquia y los 488 de Francia. En este estudio participaron varias comunidades autónomas con muestras de tamaño suficiente para obtener datos segregados. En la siguiente tabla se muestran los resultados de TIMSS, junto con los del estudio PISA (*Programme for International Student Assessment*). Como se puede observar, existe una fuerte correlación entre los datos obtenidos en ambos estudios a pesar de que TIMSS corresponde a 4º de primaria y el universo de PISA es el alumnado de 15 años. El enfoque de las pruebas también es bastante distinto; PISA pone el énfasis en la “alfabetización matemática” y en la aplicación de conceptos matemáticos básicos a situaciones realistas, mientras que TIMSS es una prueba más ligada al contenido curricular.

Tabla 1

	TIMSS 2015	PISA 2015
Media UE	519	493
Media OCDE	525	490
España	505	486
Castilla y León	531	506
Madrid	525	503
Asturias	518	492
La Rioja	518	505
Cataluña	499	500
Andalucía	486	466

Por citar resultados de otros países en TIMSS 2015, Reino Unido y Bélgica obtuvieron 546 puntos; Portugal, 541; Polonia, 535; Holanda, 530; Alemania, 522 o Italia, 507.

En cuanto a la atención a la diversidad, en TIMSS 2015 aparecen datos relevantes que apuntan en la misma dirección que los procedentes de otros estudios. El porcentaje de estudiantes con bajo rendimiento en España está en la media: 6,8% es el promedio OCDE, 7% en el caso de España. Sin embargo, con respecto al número de alumnado con rendimiento avanzado, se está muy por detrás: 9,9% es el promedio OCDE y 3,4%, el dato para España. La atención a la diversidad es un tema que merece especial atención, demanda recursos específicos y estrategias para atender al alumnado en los dos extremos de la distribución. Estos datos apuntan a que se requiere una mejoría en la atención al alumnado con alto rendimiento.

Se requiere una mejor atención del alumnado con alto rendimiento en matemáticas

También en el análisis de género aparecen algunos datos que sugieren que existe una brecha de género en la educación matemática, ya en edades tempranas. Entender sus causas es imprescindible para diseñar políticas dirigidas a solucionar este problema, por lo que es fundamental investigar cómo y cuándo se origina esta brecha de género⁵. En la media global internacional, los resultados promedio por género son exactamente los mismos, 505 puntos en ambos casos.

⁵ Véase capítulo sobre Igualdad de Género en este Libro Blanco

Sin embargo, los datos obtenidos en nuestro país, desglosados en la tabla 2, indican diferencias significativas.

Tabla 2

	2011	2015
Niños	488	511
Niñas	477	499

Como se aprecia, la diferencia se ha mantenido constante en los dos estudios y está entre las mayores de todos los países participantes. Solo en Italia es mayor (20 puntos) y es igual a la observada en Croacia, Eslovaquia y Portugal. En el promedio de la OCDE, los resultados de los niños son 6 puntos superiores a los de las niñas. La variabilidad de esta diferencia de resultados entre diferentes países es una indicación sólida de que **el origen de la diferencia hay que buscarlo en el entorno sociocultural, o en el propio sistema educativo**, y parece urgente indagar en las causas de la diferencia de rendimiento por género observadas en España a tan temprana edad.

Por último, en la tabla 3 se muestran los resultados del alumnado español en los diferentes dominios de contenido y cognitivos en el estudio TIMSS 2015.

Tabla 3

Dominios de contenido		Dominios cognitivos	
Números	504	Conocer	505
Geometría y medida	503	Aplicar	505
Representación de datos	509	Razonar	502

Faltan los datos promedio con los que comparar estos resultados por dominios, pero sí existen datos sobre el número de países que muestran fortalezas y debilidades relativas (es decir, comparadas con su propio resultado global en el estudio) en cada uno de ellos. En el caso de los dominios de contenido, en 23 países tienen resultados mejores en ‘Números’ que en el global, y en 14 casos los resultados son peores. En ‘Geometría’, esta relación es 17 mejores-21 peores, en tanto que en ‘Representación de datos’ la relación es 17-20. Vemos, por tanto, que en este análisis los resultados de nuestro país no siguen el patrón más frecuente. En cuanto a los dominios cognitivos, los datos de países con fortalezas

y debilidades relativas están muy equilibrados: 17-19 en el dominio ‘Conocer’, 11-10 en el dominio ‘Aplicar’ y 18-21 en el dominio ‘Razonar’. En el caso español, los resultados en ‘Conocer’ y ‘Aplicar’ coinciden con el resultado medio y el dominio ‘Razonar’ desciende ligeramente.

Sería fundamental tener una explicación de los resultados conseguidos por el alumnado de España, que en la comparativa internacional hay que **calificar de mediocres**. Sin embargo, la complejidad del proceso educativo, en el que intervienen multitud de factores, hace difícil detectar las causas de las diferencias de rendimiento entre diferentes países. Además de los factores culturales y sociológicos, que tienen indudablemente un impacto, se pueden distinguir los siguientes factores dentro del propio sistema escolar que también influirían:

- Formación del profesorado.
- Materiales didácticos presentes en las aulas, ya sean libros de texto o propuestas elaboradas por los docentes. Uso de tabletas u otros medios tecnológicos.
- Organización y diseño curricular.
- Organización de los centros escolares.
- Financiación en educación en los diferentes países.

Precisamente porque la formación del personal docente es uno de los componentes que determinan de manera fundamental los resultados, está tratado de manera específica en este Libro Blanco.

En cuanto a los materiales didácticos presentes en las aulas, parece que su calidad ha sufrido un deterioro considerable en los últimos años. La necesidad de aprobación previa por parte de la administración para el uso de los libros de texto en las aulas fue eliminada en el año 1997, y no ha sido sustituida por ningún mecanismo que garantice la calidad de los materiales que están siendo utilizados en los colegios. El control de calidad está en manos exclusivamente del profesorado, quizás sin tener suficientemente presente que, para ese control, es esencial una sólida formación en matemáticas, que, según se discute en este mismo Libro Blanco, es otro de los problemas de la situación española. Por supuesto, lo mismo se puede decir cuando se habla de los materiales y las propuestas elaborados directamente por el personal docente. Sin una buena formación matemática y didáctica de los autores y autoras, es difícil que reúnan los requisitos necesarios para que den buenos resultados en las aulas.

Respecto al actual currículo de Matemáticas en la etapa de primaria, no se puede hacer un análisis detallado, pero sí se van a señalar algunos de los aspectos que requieren, a nuestro juicio, de una revisión:

- **El currículo está sobrecargado de contenidos**, lo que hace que no se disponga del tiempo necesario para que el alumnado comprenda en profundidad los conceptos y técnicas básicos. Este problema afecta también a currículos de otros países, se suele describir en el mundo anglosajón como “a mile wide and an inch deep” (muy extenso, muy poco profundo) y se menciona en recientes informes (OECD, 2019). El alumnado estudia muchos contenidos, pero parece aprender pocos. Un enfoque alternativo, que ha sido seguido por varios países que figuran como referentes de éxito educativo, sería elegir los temas importantes y estudiarlos en profundidad para que el alumnado esté en condiciones de avanzar desde bases realmente sólidas.

El alumnado estudia muchos contenidos, pero parece aprender pocos

- **La repetición de contenidos en diferentes cursos es excesiva**, y en combinación con la sobrecarga de temas mencionada en el punto anterior, hace que pocas veces se disponga del tiempo suficiente para desarrollar las tareas necesarias para conseguir un aprendizaje real. El diseño en espiral del currículo está basado en teorías de aprendizaje bien establecidas. Sin embargo, los detalles de esa espiral –cuánto se avanza en un contenido al volver a tratarlo de nuevo, para evitar repeticiones– debería ser objeto de revisión.
- **Los procesos, métodos y actitudes se contemplan en un bloque de carácter transversal**. Sin embargo, quizá por la inercia de enfocarse en los contenidos, quizá por falta de formación específica de los docentes, la realidad parece ser que este bloque no está siendo tratado de manera suficiente en las aulas. Son necesarias nuevas iniciativas para hacer evolucionar las prácticas de la mayoría de las aulas, centradas casi siempre en el resultado final y, de esta manera, darle importancia al razonamiento y a la explicación de los procedimientos necesarios para llegar a ese resultado. Una opción podría ser incluir en el currículo “experiencias de aprendizaje” concretas, como por ejemplo, usar materiales manipulativos para hacer grupos de diez y de cien, a la hora de explicar conceptos como la introduc-

ción de la notación posicional. En otra dirección, siguiendo el principio de que “lo que no se evalúa, no existe”, se debería incidir en la importancia de evaluar el razonamiento en la resolución de problemas.

- Es necesaria una **reflexión sobre el papel de los algoritmos tradicionales** en la educación matemática actual. En el currículo se menciona la “automatización” de los algoritmos tradicionales, llegando en el caso de la división a los dividendos de hasta 6 cifras y divisores de hasta 3 cifras.
- En otras ocasiones, la falta de claridad hace que la **inercia prevalezca**. Aún siguen presentes en algunas de nuestras aulas y libros de texto técnicas como el algoritmo tradicional para el cálculo de la raíz cuadrada, que no se recoge explícitamente en el currículo desde el año 1997 y que ha desaparecido completamente a nivel internacional.
- Sigue presente terminología que quizá fue de uso común en el pasado, pero que no es matemática ni se usa en la vida cotidiana como, por ejemplo, “cuerpos redondos” o “ley del doble”. También se sigue enseñando la “regla de tres”, una técnica que es considerada inadecuada por la gran mayoría de especialistas en didáctica de las matemáticas, ya que induce a errores de aprendizaje y dificulta la comprensión de la proporcionalidad.
- **Se abusa de terminología** poco adecuada para edades tempranas. La presencia de términos demasiado técnicos para la edad del alumnado dificulta la comprensión, además de que puede presentar las matemáticas como algo lejano y complicado. Se debería revisar la presencia de términos como minuendo, sustraendo, dividiendo o cociente en el currículo de los primeros cursos de primaria.

En cuanto a los contenidos cuyo tratamiento en el currículo se debería considerar, se destacan los siguientes:

- La **introducción al álgebra**, también llamada preálgebra, se inicia en muchos países (Estados Unidos, Canadá o Singapur son solo algunos ejemplos) en los cursos correspondientes a los últimos años de la educación primaria en España. Esto permite al alumnado disponer del tiempo necesario para desarrollar la capacidad de pensamiento abstracto, fundamental para continuar el estudio de las Matemáticas. En España se pasa, en apenas dos cursos, de la nula presencia de los razonamientos algebraicos en la etapa de primaria a desarrollos quizá excesivamente técnicos en 2º y 3º

de ESO. Las dificultades que surgen en una adecuada transición de los contenidos prealgebraicos que se imparten en primaria y los contenidos algebraicos de secundaria, así como las posibilidades de innovación se tratan con más profundidad en la subsección de este mismo capítulo referida a las matemáticas en la etapa de educación secundaria.

- El **estudio de la geometría** es ideal para desarrollar la capacidad de razonamiento y la resolución de problemas. Sin embargo, en la mayoría de las aulas su enseñanza se reduce al estudio de los problemas de medida y al cálculo de perímetros, áreas y volúmenes, con ayuda de las fórmulas correspondientes. Otros aspectos del pensamiento geométrico, como el estudio de las figuras y sus propiedades (problemas de ángulos y de geometría deductiva en general), tienen poca presencia en el currículo oficial. Su tratamiento en las aulas suele ser limitado, casi siempre condicionado por la costumbre de situarlo al final de los libros de texto, con los problemas de falta de tiempo que eso suele llevar aparejado.
- La **estadística y la probabilidad** son seguramente las áreas de las matemáticas que resultan más útiles para tener una ciudadanía informada en una sociedad caracterizada por la multitud de datos que llegan a través de diversos canales. Ser capaz de analizarlos y de inferir la información que proporcionan es un requisito esencial para desarrollar una ciudadanía con espíritu crítico. Su tratamiento en el currículo sufre los mismos problemas que los mencionados en el punto anterior. Se debería estudiar cómo conseguir que el alumnado adquiera los conocimientos básicos para la interpretación de datos estadísticos y el razonamiento probabilístico.

La comunidad educativa parece consciente de la necesidad de un cambio en la enseñanza de las matemáticas, como muestra la aparición en los años recientes de métodos alternativos de didáctica de las matemáticas como Entusiasmat, Jumpmath, Smartick, ABN o Matemáticas Singapur. Ferrando, Segura y Pla-Castells (2017) realizan un análisis crítico de algunas de ellas, de entre las que merece especial atención la llamada “metodología Singapur” por las siguientes características:

- Está basada en ideas bien contrastadas en el campo de la didáctica de las matemáticas. Destaca el aprendizaje en tres etapas de Jerome Bruner.

- Está enfocada hacia las actividades de mayor valor cognitivo: comprensión, razonamiento y resolución de problemas.
- Lleva siendo utilizada en el país que le da nombre desde hace aproximadamente 30 años, con excelentes resultados en las pruebas internacionales de referencia.
- Está siendo implementada también en países de nuestro entorno, desde hace algunos años en el caso de Reino Unido, con resultados positivos (Sandall, 2016) y es una de las propuestas del *Informe Villani* para la mejora de la enseñanza de las matemáticas en Francia (Villani y Torossian, 2018; AMS, 2018).

No se pueden cerrar estas páginas dedicadas a la enseñanza de las matemáticas en educación primaria sin mencionar uno de los pilares básicos de su funcionamiento: la formación del profesorado. El estudio TEDS-M (*Teacher Education and Development Study in Mathematics*) del año 2011 (INEE, 2018) sigue siendo la referencia más importante para hacer una comparativa a nivel internacional. En él, se analizaron los conocimientos matemáticos (tanto de contenidos como de didáctica) del alumnado de último curso de la entonces diplomatura en Magisterio de Educación Primaria. Uno de los datos más llamativos del estudio es la falta de un modelo común para la formación del personal docente de primaria. El necesario equilibrio entre formación en contenidos y formación en metodologías se busca en algunos lugares estructurando la formación en dos etapas (en primer lugar, los contenidos, después, la metodología) y en otros, como ocurre en nuestro país, trabajando los dos aspectos de manera simultánea. En lo que respecta a los resultados de nuestro alumnado de magisterio, estuvieron en línea con el resto de pruebas internacionales, es decir, por debajo de la media de los obtenidos por los países de nuestro entorno.

Falta un modelo común para la formación del personal docente de primaria

Una de las opciones que se pueden considerar para resolver este problema es introducir la especialización entre el personal docente de primaria. Sin embargo, debemos tener presente que algunos estudios (Fryer, 2018) sugieren que esta medida podría tener efectos negativos en el aprendizaje, debido a que dificulta la interacción personal docente-alumnado, fundamental en las primeras etapas de la educación. Una opción intermedia podría ser considerar la figura del docente

con formación reforzada en matemáticas, no con el objetivo de que se encargue de toda la docencia de matemáticas, sino con la idea de que asuma un rol de coordinación entre los equipos docentes y los ayude en el desempeño de aquellas tareas relacionadas con el área de Matemáticas. Una vía para ello podría ser reconsiderar el sistema de acceso a la función pública: no está claro que deba haber una vía reservada a docentes especialistas en áreas como Educación Física, Música o Inglés, y no tener una parte de las plazas destinadas a promover a docentes con formación reforzada en las áreas instrumentales: Matemáticas y Lengua.

1.2. Educación matemática en la educación secundaria

Desde 1990, el currículo de educación matemática en la etapa escolar de educación secundaria en España ha experimentado cinco reformas de calado. En esta sección vamos a profundizar en las tres que corresponden al siglo XXI (LOCE 2003, LOE 2006 y LOMCE 2013). Todas ellas se han basado en garantizar los principios de universalidad, comprensibilidad y equidad del Sistema Educativo. Dichos principios van a guiar la presentación de debilidades, fortalezas y oportunidades de la educación matemática en educación secundaria para una transición continua y sin brechas desde la etapa de educación primaria hasta la universidad.

El derecho universal a la escolarización en la Educación Secundaria Obligatoria establecido en la LOGSE 1990, supuso el reto de la determinación de los contenidos mínimos para asegurar la alfabetización matemática de todo el alumnado. Sin embargo, los primeros resultados de las Pruebas PISA del año 2000 (OCDE, 2002) **mostraron las dificultades del alumnado participante para reconocer e interpretar problemas en contextos personales, sociales y laborales**. Es más, dichas pruebas pusieron en evidencia las disyunciones entre la organización cognitiva del currículo LOGSE de 1990, basada en conceptos, procedimientos y actitudes (RICO et al., 2011), y la visión fenomenológica de las pruebas PISA 2000, que adjudicaban tres niveles de complejidad cognitiva, reproducción, conexión y reflexión, para los fenómenos organizadores de la evaluación (cantidad, espacio y forma, cambio y relaciones e incertidumbre).

Los resultados de PISA 2000 propiciaron el cuestionamiento de los principios de universalidad y comprensibilidad de la educación matemática vigente hasta el momento, y la concreción de un nuevo currículum LOCE 2003. Por una parte, se enfatizó, aún más si cabe, que la universalidad de la educación ma-

temática debía asegurar la comprensibilidad para todo el alumnado de forma que le aportase conocimientos y destrezas para la vida. Distinguiendo en Educación Secundaria Obligatoria (MECD, 2004), entre las Matemáticas de 4º A con un carácter marcadamente funcional, que favoreciesen el manejo en aspectos prácticos de la vida cotidiana; y una finalidad propedéutica para Matemáticas de 4º B, que facilitase el acceso a otras ramas de la ciencia y la continuidad de los estudios de Formación Profesional o Bachillerato. Así pues, la transición al Bachillerato LOCE (MECD, 2003) se dictaminaba como la culminación de un largo proceso destinado a asumir con el suficiente formalismo determinados contenidos conceptuales que caracterizan la estructura intrínseca de las matemáticas (como, por ejemplo, los polinomios). Aunque se solicitaba el equilibrio entre el desarrollo de contenidos y procedimientos, la realidad hizo de este currículum un cajón de sastre. Cajón donde debían caber los contenidos antiguamente incluidos en la etapa de secundaria obligatoria, que se habían eliminado por carecer de una finalidad funcional para la vida cotidiana y que se consideraban primordiales para una adecuada transición a la universidad. La amplitud de contenidos y el carácter “atomicista” del mismo se ha reproducido en las reformas del currículo de Bachillerato incluidas en LOE 2006 y LOMCE 2014, teniendo consecuencias en las transposiciones didácticas del currículum dictaminado al real del aula y al evaluado en las pruebas de acceso a la universidad. Dicha transposición reduce el currículum a la producción de resultados que se consideran imprescindibles para la transición a la universidad y la reproducción de actividades matemáticas tipo; sin embargo, asigna un rol decorativo a los axiomas, definiciones y demostraciones. A su vez, los autores y editores de libros de texto los entienden como manuales enciclopédicos, donde incluir axiomas, definiciones, teoremas, demostraciones y un amplio abanico de ejercicios matemáticos tipo. Esta perspectiva contrasta con una formación universitaria más focalizada en la organización teórica del contenido matemático, los fundamentos del conocimiento y la presentación de demostraciones y teoremas como herramientas para responder a los problemas que han favorecido el avance matemático. Un detalle pormenorizado de esta formación se puede consultar en el capítulo de educación universitaria. Las dificultades que surgen en la transición de la educación secundaria a la universidad no son únicas de España, está ampliamente reconocido en la comunidad científica que es un esfuerzo desafiante tanto desde la perspectiva del alumnado como del profesorado (Gueudet, 2008). Las principales dificultades del estudiantado al enfrentarse a los desafíos de las matemáticas del nivel universitario son la traducción del razonamiento informal en

argumentos válidos y la falta de estrategias de argumentación y de competencias para demostrar (Stylianides et al., 2017). La RSME, editora de este libro, está directamente involucrada en la búsqueda de acciones para mejorar esta situación. Por ello, durante el año 2019 ha participado en dos iniciativas para analizar la situación: la participación en la Comisión de Educación del Comité Español de Matemáticas con sus jornadas sobre “Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad” y la colaboración, a nivel internacional, en la encuesta de la European Mathematical Society (EMS) sobre las transiciones en matemáticas.

Por otra parte, con el fin de asegurar la comprensibilidad de la materia por parte de todo el alumnado, en la LOCE 2003 se incluía la propuesta curricular para la educación obligatoria de que la enseñanza de la matemática debía tratarse de forma cíclica. En consecuencia, se concebía el currículum de manera que en cada curso a la vez que se introducían nuevos contenidos, se revisasen los de cursos anteriores y se ampliase su campo de aplicación y se enriqueciesen con nuevas relaciones. Se pueden encontrar posturas enfrentadas entre el profesorado que considera esta revisión de los conocimientos de cursos anteriores como una repetición no necesaria, que se podría obviar si se trabajasen los contenidos una única vez con profundidad, o la que apoya la RSME (Marcellán, 2017), que propone mejorar el enfoque de la enseñanza en espiral, de forma que además sea una oportunidad para atender a la diversidad del alumnado.

Sin embargo, hasta los decretos asociados a la reforma de la LOE 2006 no se observa en España una intención manifiesta en los diseños curriculares de Educación Secundaria Obligatoria por superar la visión cíclica de la adquisición del conocimiento, a partir de la repetición de los contenidos del curso anterior, hacia una propuesta en espiral que propone la evolución hacia niveles superiores de desarrollo competencial. Ante la debilidad que surge al transferir el conocimiento de un nivel educativo al siguiente, existe la fortaleza de concebir el currículum en espiral y la oportunidad, desde una perspectiva fenomenológica, para innovar e investigar sobre cómo organizar el contenido de forma que favorezca el desarrollo de la competencia matemática en otros contextos. Un ejemplo, digno de mención, sobre las oportunidades de innovación curricular es la propuesta estadounidense del *Common Core State Standards for Mathematics*, que supera la visión cíclica de la organización curricular y propone una visión hexagonal de la articulación del aprendizaje. Esta estructuración favorece el diseño de diferentes trayectorias de aprendizaje para el alumnado con el fin de su desarrollo competencial (Confrey et al., 2014).

En España, una vez asegurada, al menos en papel, la alfabetización matemática en etapas escolares obligatorias, los marcos teóricos de las evaluaciones PISA (OCDE, 2019) 2003, 2006, 2009 y 2012 influenciaron la reforma de los sistemas educativos de la Unión Europea con el fin de asegurar el desarrollo y evaluación de las competencias básicas y claves, concretadas en el estado español en la LOE 2006 y la LOMCE 2014. Dichas leyes orgánicas decretaron la necesidad de la realización de pruebas de diagnóstico de carácter muestral o poblacional para cada comunidad autónoma.

Estas evaluaciones no deberían diseñarse con la intención de clasificar el nivel competencial del alumnado y/o los centros educativos, sino como un instrumento para establecer un marco de referencia que favorezca la transición a la vida adulta para una plena ciudadanía y garante de la continuación en la formación matemática. En este sentido, debe existir una transición continua entre el desarrollo de la competencia matemática en edades escolares y las competencias profesionales de un matemático en activo (los conocimientos, destrezas y actitudes que se ponen en juego para la construcción y validación del conocimiento matemático). La conceptualización de la competencia matemática, su desarrollo curricular, su implementación metodológica y evaluación están suponiendo un proceso largo y arduo, que merecen una descripción pormenorizada en la sección: *“El papel de la resolución de problemas: modelización y competencias STEAM”* de este mismo capítulo.

En el currículo de Matemáticas para la Educación Secundaria Obligatoria de la LOE 2006 (MEC, 2016) se puede observar la primera influencia del desarrollo de competencias en la organización curricular. Dicho documento incluía un bloque de contenidos comunes, que coinciden con las competencias matemáticas evaluadas en PISA 2003, que se constituía como el eje transversal vertebrador del desarrollo del conocimiento matemático disciplinar. Estos son: la resolución de problemas, la verbalización de los procesos de resolución, la interpretación de mensajes y el uso de herramientas tecnológicas. Además, consideraba como contenido común el desarrollo de actitudes matemáticas como la autoconfianza, la flexibilidad de pensamiento y la perseverancia.

Paralelamente, las propuestas del Plan Bolonia para las universidades también cuestionaban la necesidad de desarrollar y evaluar las competencias profesionales. Sin embargo, en el currículo dictaminado para Bachillerato (MEC, 2007) no se mencionaba dicho desarrollo competencial, sino que se anclaba en

el desarrollo disciplinar de la materia. En dicho currículo se indicaba que los contenidos de Matemáticas como materia de modalidad en el Bachillerato de Ciencias y Tecnología giraba en torno a dos ejes fundamentales: la geometría y el álgebra, condenando a que los bloques de análisis y probabilidad desaparecieran del currículo real del aula y de las pruebas de acceso a la universidad. En cambio, en la modalidad de Ciencias Sociales se otorgaba igual importancia a todos los bloques disciplinares: aritmética y álgebra, análisis y probabilidad y estadística. Sin embargo, para esta modalidad las directrices curriculares relativizaban la presencia de la abstracción simbólica, el rigor sintáctico y la exigencia probatoria. Estas directrices han condenado el aprendizaje de las Matemáticas en las Ciencias Sociales a la aplicación de métodos y estrategias inconexas entre sí, en lugar de reconocer la potencialidad de la teoría matemática fundamentada en unos procesos de pensamiento lógico y analítico.

Esta misma condena se ha repetido al prescribir las diferencias entre Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas y Aplicadas en 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria de la LOMCE 2014 (MEC, 2015). Mientras que el alumnado de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas deberá profundizar en el desarrollo de las habilidades de pensamiento matemático, el estudiantado de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas deberá progresar en la adquisición de algunas habilidades de pensamiento matemático como son: el análisis, la interpretación y la comunicación de técnicas. La diferencia entre ambas dista mucho de las propuestas internacionales de organización curricular que discriminan entre la modelización y la aplicación de las matemáticas para la detección y resolución de problemas asociados a fenómenos del mundo real. Dichas diferencias se concretarán en otra sección de este capítulo, indicando las oportunidades que suponen el desarrollo de un currículum innovador orientado a la modelización y aplicación de fenómenos reales.

LOMCE 2014 introdujo un bloque titulado “*Procesos, métodos y actitudes en matemáticas*”, que se configura como el articulador de los procesos básicos e imprescindibles en el quehacer matemático en las etapas escolares. Los procesos comunes establecidos por toda la etapa, llamados competencias específicas o capacidades matemáticas en los documentos PISA, son: la resolución de problemas, los proyectos de investigación matemática, la matematización y modelización, las actitudes adecuadas para desarrollar el trabajo científico y la utilización de medios tecnológicos. La importancia de estas competencias específicas y el

uso de los medios tecnológicos se fundamentan en otras secciones de este mismo capítulo.

En Educación Secundaria Obligatoria se enfatiza que el alumnado desarrolle procesos de resolución de problemas, mientras que en Bachillerato se da más importancia a los procesos de investigación. En particular, dentro de los procesos de matematización en el Bachillerato de Ciencias y Tecnología se incluye la realización de demostraciones sencillas de propiedades o teoremas. Esta propuesta, tal y como se ha argumentado con anterioridad, es insuficiente para una adecuada transición a los estudios universitarios.

Los resultados de las pruebas de diagnóstico de las comunidades y los resultados PISA 2018 indagan si la existencia de diferentes itinerarios de desarrollo de pensamiento matemático por parte del alumnado son un elemento precursor de la equidad del sistema educativo español (Varquero, 2018). El programa de evaluación PISA 2018 (OECD, 2018) no aporta información específica sobre los niveles de desarrollo de la competencia matemática, como en evaluaciones anteriores de los programas PISA. En cambio, evalúa las asimetrías internacionales del desarrollo de la competencia global.

La competencia global es un objetivo de aprendizaje multidimensional y permanente, donde el estudiantado puede examinar cuestiones locales, globales e interculturales, comprender y apreciar diferentes perspectivas y visiones del mundo, interactuar con éxito y de manera respetuosa con los demás, y actuar de modo responsable hacia la sostenibilidad y el bienestar colectivo. En particular, las recomendaciones de la Unión Europea del año 2018 sobre educación, enfatizan que las cuestiones para el desarrollo de la competencia global deberán referirse a los objetivos mundiales de desarrollo sostenible para el 2030 (Naciones Unidas, 2015). Algunos ejemplos de ellos, que pueden convertirse en situaciones problemáticas de aprendizaje multidimensional, son: la sostenibilidad del agua y el saneamiento, el crecimiento económico, la organización de las ciudades, el consumo y la producción sostenible de bienes, el cambio climático, los sistemas terrestres y marinos, etc. Uno de los ejemplos propuesto en los marcos teóricos del PISA 2018 para el desarrollo de dicha competencia global es que el alumnado decida si son las funciones lineales o las exponenciales las que ajustan mejor los datos de crecimiento de la población mundial.

Este documento subraya que se debe evitar el riesgo de que la educación global se convierta en un plan de estudios cajón de sastre donde todo cabe. Para

superar esta dificultad, la formación inicial y permanente debería proveer al profesorado de educación secundaria de conocimiento tecnológico, pedagógico y matemático que fomente una educación matemática crítica, intercultural y sostenible. Esta necesidad debe ser una oportunidad de mejora de la formación inicial y permanente del profesorado de Matemáticas –recogida en otra sección de este capítulo.

Cabe destacar los esfuerzos realizados por las administraciones educativas de las comunidades autónomas y los centros escolares, los departamentos didácticos y docentes de Matemáticas que, a título individual, han considerado los documentos PISA y las pruebas de diagnóstico como una oportunidad para mejorar las propuestas curriculares vigentes y no como un mero establecimiento de rankings. Estas fortalezas se han visto plasmadas en innovaciones curriculares que han roto la estructura organizativa tradicional de las disciplinas y han apostado por metodologías como el trabajo con tareas auténticas, el aprendizaje basado en problemas y/o proyectos o la integración curricular de las disciplinas académicas de ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas (CTIAM, equivalente en español al acrónimo en inglés STEAM). En España, se están empezando a tener en consideración estas propuestas interdisciplinares de organización curricular para edades escolares, ampliamente implementadas y analizadas en otros países (National Research Council, 2011).

Dichas propuestas no deben entenderse como la desaparición total de las disciplinas, aún presentes en los bloques de contenido matemático de la LOMCE 2014. Por el contrario, se debe concebir como una oportunidad doble para mejorar la estructura disciplinar del conocimiento; una primera, para comprender qué y cómo ciertos fenómenos inciden en las diferentes disciplinas matemáticas y dotan al currículum de un carácter multidisciplinar (por ejemplo, las propuestas CTIM), y una segunda oportunidad, para reconocer los problemas que históricamente han permitido evolucionar las diferentes disciplinas. Estos problemas deberían convertirse en los núcleos organizadores del currículum que facilite la continuidad en el aprendizaje desde su transición en educación primaria hasta la universidad.

Por supuesto, estas oportunidades deben partir de las investigaciones que analizan las debilidades del currículum disciplinar actual (algunas de ellas recogidas ya en las propuestas de la RSME para el Pacto Educativo) (Marcellán, 2017).

La **primera debilidad** parte del hecho de que las primeras conceptualizaciones internacionales de la alfabetización matemática de 1978 (UNESCO, 1978) se relacionaron con los conocimientos y destrezas necesarios para aplicar las operaciones aritméticas aisladamente o de forma secuencial. Dicha concepción persiste en el currículum de educación primaria y educación secundaria donde se concibe la numeración como la aritmetización. La introducción en 1998 del concepto de alfabetización cuantitativa (*quantitative literacy*) (OECD, 2011) abre el paradigma aritmético a nuevas demandas matemáticas que fácilmente incluyen o excluyen la incertidumbre, la causalidad, el azar, la posibilidad o el riesgo. La inclusión de la incertidumbre amplía el campo definitorio del número. Desde una consideración inicial, donde cada número determina una cantidad de objetos, a la descripción de la cuantificación de una situación aleatoria y, finalmente, la abstracción del objeto matemático que representa una cantidad o magnitud. Concebir que el número sea el elemento definitorio común de dos fenómenos inconexos, la cantidad y la incertidumbre, debería permitir al profesorado conectar disciplinas tradicionales en edades escolares como son la aritmética, la estadística y probabilidad.

La ampliación de la conceptualización del número de la cantidad a la cuantificación en situaciones de incertidumbre debería permitir al profesorado conectar dos disciplinas tradicionalmente sin relación como son la aritmética y la estadística y probabilidad. Precisamente, la desconexión entre la estadística y la probabilidad es la **segunda debilidad** del carácter disciplinar del currículum de secundaria. Esta separación se agrava en segundo de Bachillerato, cuando el alumnado debe iniciar el estudio de la estadística inferencial y comprender la finalidad de usar modelos probabilísticos para conjeturar y tomar decisiones sobre distribuciones de datos estadísticos sin reconocer la aplicación matemática de los modelos probabilísticos. Para superar estas disyunciones, se proponen acercamientos curriculares estocásticos, que contemplen la complejidad de las relaciones entre el conocimiento, el razonamiento y el pensamiento estadístico y probabilístico (Batanero y Chernoff, 2018).

Para superar esta disyunción, se necesitan diseños curriculares que:

- a) No reduzcan la estadística descriptiva a la representación gráfica y al cálculo de parámetros, sino que asocien su estudio a procesos de investigación donde sucesivamente aumente el tamaño de la población. Esto permitirá

poder hablar en estudios posteriores del *big data* y la significatividad de la muestra.

- b) Consideren la oportunidad que la inferencia informal tiene en los primeros niveles de la etapa de Educación Secundaria Obligatoria, como iniciación a los procesos de modelización de datos y al estudio de modelos teóricos probabilísticos para su posterior aplicación en la estadística inferencial.
- c) Se establezcan relaciones entre las diferentes aproximaciones a la conceptualización de la probabilidad (subjética, clásica, frecuencial, axiomática...) que favorezcan el análisis de la variabilidad de los datos aleatorios, sus distribuciones experimentales y su comparación con las distribuciones teóricas. Ejemplos de buenas prácticas son los proyectos de aprendizaje de la estocástica internacionales como Census at School, Earlystatistics o Proconvic.

Retomar la idea de número y el proceso de abstracción a una cantidad o una magnitud nos permite delimitar la **tercera debilidad** relacionada con el estudio del álgebra. Está referida a la falta de conexión entre el álgebra y las demás subáreas de la matemática y la ausencia de significado cotidiano en el aprendizaje adquirido por el alumnado, reducido, en muchos casos, a la resolución descontextualizada de ecuaciones o a la operatividad con polinomios y matrices. Por ello, se aboga por una transición entre los dos últimos cursos de Educación Primaria y los dos primeros cursos de Educación Secundaria Obligatoria que fomente una evolución natural en la forma de pensar y actuar con objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas. Se debe propiciar que el alumnado explore, modelice, haga predicciones, discuta, argumente, compruebe ideas y también practique habilidades de cálculo. En palabras de Kaput (1999), se trata de una *algebratización del currículo*; es decir, la integración del pensamiento algebraico en las matemáticas en edades escolares. Significaría otorgar una visión multidimensional al álgebra acorde con la comprensión de patrones, las relaciones entre las cantidades y las funciones, la representación de las relaciones matemáticas, el análisis de situaciones y estructuras matemáticas usando símbolos algebraicos, el uso de modelos para representar y comprender relaciones cuantitativas y el análisis. Por una parte, desde un punto de vista epistemológico, permitiría conectar los fenómenos de cantidad, cambio y relaciones. Por otra parte, aportaría significado al álgebra lineal del Bachillerato de Ciencias, ya que emergería de forma

natural de la necesidad de unificar los problemas a los que históricamente han dado respuesta las funciones, los sistemas de ecuaciones y las sucesiones.

Al igual que se habla de *algebratización*⁶, se puede hablar de *geometrización del currículo* para superar las debilidades de la organización disciplinar actual de la geometría en edades escolares. Por una parte, los primeros niveles de la educación matemática se reducen habitualmente a la aplicación de fórmulas para determinar los perímetros, longitudes, áreas y volúmenes de figuras. En la aplicación de dichas fórmulas se evidencian las carencias del alumnado en el aprendizaje de las magnitudes básicas y de su medida. Estas dificultades son debidas a la diversidad y disparidad de aproximaciones a dichas nociones y a la ausencia de un programa estable para su enseñanza (Díez et al., 2016).

Por otra parte, no existe conexión entre la forma de abordar los problemas geométricos, que estudian el fenómeno del espacio y la forma, desde la geometría euclidiana sintética y desde la geometría analítica. Esta geometrización del currículo consistiría en el reconocimiento o visualización de las características del espacio y la forma, manipulación física o mediante el uso de programas de geometría que permitan analizar las características del espacio, la forma y el cambio en el movimiento de las figuras, el razonamiento, argumentación y demostraciones lógicas y formales al justificar las proposiciones planteadas. De esta manera, se podrían usar con rigor, adecuado a la edad del alumnado, los diferentes sistemas deductivos y se podrían comparar entre sí para lograr trazar puentes entre la geometría sintética y la geometría analítica. El *software* dinámico, ampliamente descrito en la sección de matemáticas y las tecnologías de la información y comunicación, como Cabri, Skechpad, Cinderella, Scratch, son herramientas polivalentes que permiten la experimentación, interacción y abstracción de los conocimientos geométricos.

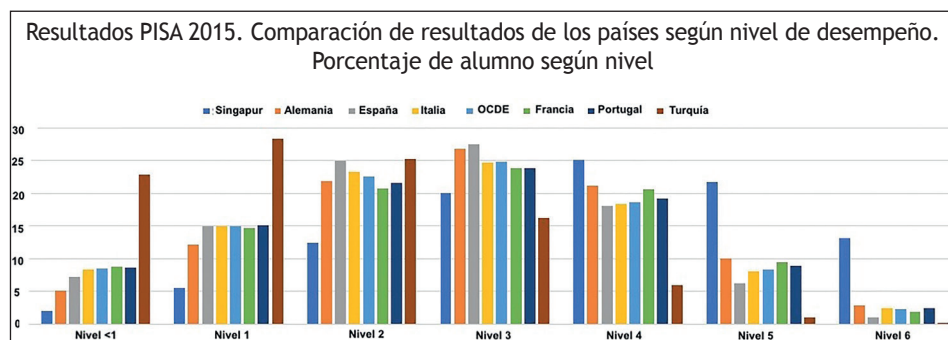
En síntesis, en esta primera parte de la sección se han delimitado las debilidades, fortalezas y oportunidades educativas que las diferentes reformas educativas del siglo XXI han aportado a la educación matemática en la etapa escolar de educación secundaria. Dicha información se complementa con la aportada en la anterior sección para la etapa de educación primaria. El análisis curricular es insuficiente, siendo necesario profundizar en la comparación de los sistemas

⁶Proceso de traducción del lenguaje aritmético y natural al lenguaje algebraico.

educativos y valorar la evolución de los resultados del alumnado en lo que va del siglo XXI. Al contrario, dicho análisis nos ha de permitir entender las necesidades actuales para atender equitativamente a la diversidad del aula. Por ello, se presentan dos análisis en esta sección que complementan los resultados de los programas PISA, las pruebas diagnósticas de las comunidades y el Sistema Estatal de Indicadores de la Educación (SEIE) (MEFP, 2019).

El primer gráfico (figura 1) corresponde a la comparación de los resultados de los países según el nivel de desempeño del alumnado correspondiente a la evaluación PISA 2015. Los países están ordenados de mayor a menor nivel de desempeño global de su estudiantado.

Figura 1

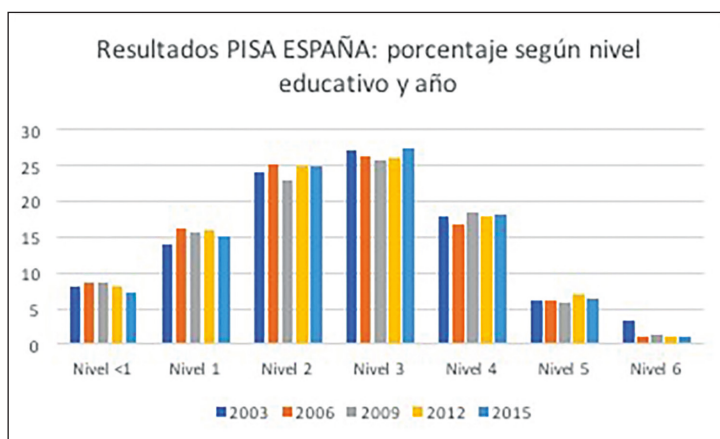


Podemos observar que España se encuentra por encima de la OCDE, superando su alumnado los resultados de sus vecinos Francia y Portugal. Dichos resultados contrastan con los de Turquía, país europeo con los resultados inferiores en la escala de la OCDE, y Singapur, con los mejores resultados en los últimos años, producto de las grandes reformas estructurales de su sistema educativo. En cambio, los resultados de los países europeos, Alemania, España, Italia, Francia y Portugal se acercan bastante a una campana de Gauss, que describiría la distribución demográfica de la población escolar sin intervención directa del sistema escolar para la mejora de los resultados de la evaluación del programa PISA.

El análisis temporal de los resultados PISA España permite concluir que no se observan modificaciones sustanciales en la evolución de la distribución de los niveles de desempeño curricular. En el año 2015, un 15% del alumnado tenía un nivel de desempeño igual a 1 (figura 2), es decir, solo eran capaces de identificar la información y llevar a cabo procedimientos rutinarios provenientes de ins-

trucciones directas en situaciones explícitas. Y aún peor, un 7,2% del estudiantado ni tan solo era capaz de realizar estas acciones. Sumando los porcentajes del nivel inferior e igual a uno obtenemos un 22%, que se sitúa entre los datos aportados por el SEIE 2017 sobre la tasa de abandono escolar que en el año 2016 fue de un 19,20%, y del 22,4% del alumnado que no obtiene el graduado en ESO. Si bien no son públicos los datos reales de número de aprobados en la materia de Matemáticas, la comparación de estos tres resultados indica que no pueden diferir mucho de un 20%. Cabe destacar que un porcentaje importante de este alumnado accede por primera vez a un aula de Matemáticas en la etapa de ESO, no habiendo estado escolarizado en el sistema educativo español con anterioridad.

Figura 2



El peso del alumnado extranjero, respecto al total de matriculado en las enseñanzas en edades escolares, se ha incrementado desde el curso 2000/2001 hasta el 2008/2009, pasando de un 2% a un 9,8%. Mientras que a partir de ese curso escolar la tendencia cambia apreciándose una leve disminución cayendo hasta el 8,6% de media en el curso 2014/15, con un valor máximo para las Islas Baleares del 14,1%.

Si en la parte inferior de la campana tenemos un 22% del alumnado, en la parte superior solo hay un 1%. Este estudiantado de altas capacidades tiene un talento innato para las matemáticas, es capaz de ejecutar, de forma autónoma, todos aquellos procesos definitorios de la competencia matemática en edades escolares. En 2012/2013 (según SEIE 2013), el alumnado de altas capacidades

se distribuía según género de forma muy desigual, siendo un 33,64% mujeres frente al 66,36% de hombres.

Cabe destacar que las tasas de graduación en ESO del SEIE 2017 indican que la diferencia entre las tasas de las mujeres y hombres que se gradúan al finalizar la ESO es de 10,1 puntos a favor de las mujeres. Sin embargo, los resultados de PISA del 2015, y anteriores, muestran una diferencia de 16 puntos a favor de los chicos en Matemáticas, que supera el promedio de los países de la OCDE.

En educación superior no universitaria apenas existen diferencias entre las tasas de matriculación de hombres y mujeres. La tasa de acceso a Formación Profesional Básica, donde se cursa la asignatura de Matemáticas aplicada al contexto personal y de aprendizaje en un campo profesional, es para los hombres del 14,4%, más del doble que para las mujeres (6,7%); en grado medio, las diferencias son menores, aunque también es más alta en los hombres (48,4%) que en las mujeres (36,8%), mientras que en el grado superior se encuentran muy igualadas: 42,7% para los hombres y 41,5% para las mujeres. Aunque en los ciclos formativos no se cursa directamente la disciplina matemática, esta desigualdad persistirá para el alumnado que acceda a la universidad.

Por el contrario, los datos de EDUCABase (MEFP, 2019) indican que la tasa de mujeres graduadas en Bachillerato es claramente superior a la de los hombres (14,7 puntos de diferencia). En Matemáticas I, la diferencia entre el número de mujeres matriculadas (53%) y el de hombres (47%) corresponde a un 6%, mientras que esta diferencia es de 24 puntos a favor de las mujeres en las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I.

Todos estos datos, junto con el análisis de diferencias de género aportadas en el capítulo específico de este libro, **ponen de manifiesto la falta de equidad de la educación matemática en edades escolares**. Para superar esta inequidad se ha recurrido excesivamente a políticas segregadoras con la finalidad de homogeneizar el sistema educativo. Ejemplos de estas políticas son: la organización de refuerzos educativos, los apoyos al alumnado extranjero o de necesidades educativas especiales fuera del aula o los agrupamientos flexibles. Ante esta debilidad del sistema educativo, el Consejo de la Unión Europea (Comisión Europea, 2018) recomienda fomentar una educación inclusiva para todos los y las aprendientes que brinde el apoyo necesario en función de sus necesidades específicas, incluidos los procedentes de contextos socioeconómicos desfavorecidos, los de

origen migrante, los que presentan necesidades especiales educativas especiales y a los de mayor talento.

Es también necesario destacar las acciones que con carácter extraescolar voluntario (tanto para el alumnado como para el profesorado asistente) realizan las asociaciones de profesorado y universidades para organizar competiciones y acciones para detectar y estimular al estudiantado con talento y/o altas capacidades matemáticas. Destacamos el trabajo de asociaciones como la RSME, la Sociedad Catalana de Matemáticas y las veintiuna sociedades que constituyen la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas que conjuntamente con los departamentos de Matemáticas de las universidades organizan un sin fin de actividades como: la Olimpiada provincial, nacional e internacional para alumnos de bachillerato, la Olimpiada Internacional Femenina, la Olimpiada Iberoamericana, la Olimpiada provincial, regional y nacional para 2º de ESO, las Pruebas Canguro de Primaria y Secundaria, los Campus Científicos y el Proyecto ESTALMAT de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, por iniciativa de Miguel de Guzmán. En el caso particular de la educación estadística, la Sociedad de Estadística e Investigación Operativa, los departamentos de Estadística e Investigación Operativa de las universidades y el Instituto Nacional de Estadística organizan las competiciones nacionales de la Incubadora de Sondeos y Experimentos, la Olimpiada Estadística a nivel nacional y europeo, la Competición Internacional de Pósteres de la ISLP (International Statistical Literacy Competition). La gran mayoría de estas iniciativas carecen de políticas educativas de respaldo que faciliten: la organización y gestión de las competiciones, el reconocimiento del profesorado y alumnado participante, la coordinación con el personal docente que realiza los enriquecimientos curriculares a nivel escolar y la formación inicial y permanente de dicho profesorado.

En resumen, el análisis de los principios de universalidad, comprensibilidad y equidad en los que se basa el sistema educativo español han sido el hilo conductor para detectar las debilidades, fortalezas y oportunidades de la educación matemática en edades escolares en este siglo XXI. La universalidad de la educación matemática entendida como la alfabetización funcional para la vida ha evolucionado hacia el desarrollo de una alfabetización numérica o cuantitativa y el desarrollo de la competencia matemática. Existe aún la debilidad de considerar que es suficiente la alfabetización funcional del alumnado sin valorar la oportunidad de una educación matemática crítica, intercultural y sostenible. Reincidir en las diferentes reformas educativas en una visión organizativa del currículum marcadamente

disciplinar, atómico y cíclico ha sido la gran debilidad para conseguir la comprensibilidad de las matemáticas en edades escolares por parte de todo el alumnado. Metodologías como las tareas auténticas, el aprendizaje basado en proyectos y/o problemas organizadores de un currículum multidisciplinar y fenomenológico se han configurado como fortalezas para innovar tanto a nivel escolar como en la formación inicial y permanente del profesorado. La extensión de puntos fuertes a todo el sistema educativo debe concebirse como una oportunidad para reflexionar sobre qué fenómenos, situaciones y/o problemas pueden ser significativos para el desarrollo de la competencia matemática en edades escolares que asegure una transición continua y sin brechas desde la educación primaria hasta la universidad. La mayor debilidad actual de la educación matemática escolar es la falta de equidad en las oportunidades de una formación matemática permanente, principalmente en el colectivo femenino del alumnado con necesidades educativas específicas, inmigrantes y talento matemático. La oportunidad del desarrollo de políticas educativas que favorezcan la inclusión de este alumnado no es suficiente, si no se definen bajo principios de visibilización histórica de las aportaciones de la mujer a la matemática, se fomenta la orientación escolar hacia las carreras científico-técnicas a partir de la divulgación de los avances matemáticos actuales, se adoptan metodologías multidisciplinarias como CTIM o el aprendizaje basado en problemas o proyectos, se atiende a la diversidad desde perspectivas inclusivas que fomenten una transición continua y sin brechas en la construcción de los conocimientos que suponen la superación de obstáculos, dificultades y bloqueos emocionales y se establecen directrices de formación permanente que coordinen las acciones para el enriquecimiento del currículum de este alumnado a nivel escolar y extraescolar.

Metodologías como las tareas auténticas, el aprendizaje basado en proyectos y/o problemas organizadores de un currículum multidisciplinar y fenomenológico, se han configurado como fortalezas para innovar tanto a nivel escolar como en la formación inicial y permanente del profesorado

2. ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

2.1. El papel de la resolución de problemas: modelización y competencias STEAM

Las exigencias de los desafíos del siglo XXI obligan a la sociedad a afrontar problemas globales en contextos cada vez más complejos y cambiantes. Así, en el mundo actual las habilidades esperadas por la ciudadanía van más allá de los

meros conocimientos y el desarrollo de procedimientos rutinarios. Se demanda, por tanto, que la formación de todos ellos incluya el desarrollo de procesos que les ayuden a resolver problemas promoviendo la adquisición de destrezas tales como la capacidad de análisis, la predicción de consecuencias o el pensamiento crítico. En los últimos años, diferentes informes y políticas educativas han impulsado la integración de disciplinas del ámbito científico tecnológico en una única perspectiva integrada que se denomina STEAM, véase, por ejemplo, el *Informe Eurydice* publicado por la UE (2012).

Esta conceptualización integradora que pone el foco en el aprendizaje comprensivo y aplicado de las matemáticas no es tan reciente como parece. En el prefacio a la primera edición en inglés de su libro *How to solve it*, George Pólya (1945) incide en la importancia de que el profesorado intente, a través de propuestas basadas en la resolución de problemas, **despertar la curiosidad de sus estudiantes y el gusto por el pensamiento independiente**. En efecto, coincidimos con Pólya en que, si el alumnado ve las Matemáticas como una materia que simplemente tiene que superar reproduciendo una serie de procedimientos rutinarios, pierden la oportunidad de descubrir el placer de poner en juego la curiosidad y el razonamiento para llegar a una resolución. Por el contrario, al promover el razonamiento en la resolución de tareas no rutinarias, se puede conseguir que el estudiantado dé sentido a los contenidos matemáticos que adquieren, desarrollando lo que se suele denominar pensamiento matemático (Schoenfeld, 1992).

Esta interpretación de la educación matemática ha ganado importancia a nivel internacional conforme la comunidad matemática se ha ido implicando en el desarrollo curricular de los diferentes países. Así, por ejemplo, el currículo en vigor actualmente en España incide en la importancia de la resolución de problemas:

La resolución de problemas se convierte en objetivo principal. El proceso debe cultivar la habilidad para entender diferentes planteamientos e implementar planes prácticos, revisar los procedimientos de búsqueda de soluciones y plantear aplicaciones del conocimiento y las habilidades matemáticas a diversas situaciones de la vida real; sobre todo, se debe fomentar la autonomía para establecer hipótesis y contrastarlas, y para diseñar diferentes estrategias de resolución o extrapolar los resultados obtenidos a situaciones análogas (LOMCE, RD1105/2014, p. 381).

Desde esta perspectiva, se pretende que el alumnado adquiriera los conocimientos matemáticos entendidos como herramientas para el razonamiento y, por ende, para el desarrollo de una ciudadanía libre, crítica y competente.

Durante los últimos 40 años, se han desarrollado numerosos programas de investigaciones centrados en la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas. Estas investigaciones han fructificado en diferentes reformas educativas. De esta forma, tal y como indica Schoenfeld (1985), las críticas a las reformas derivadas de la Matemática Moderna fueron importantes para poner el foco en el uso de la resolución de problemas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En sus trabajos sobre resolución de problemas, Pólya (1945) se basa en su propia experiencia como matemático para reflexionar sobre el proceso de resolución de un problema. De esta manera propone un marco para describir, en cuatro etapas, el proceso de resolución de una tarea no rutinaria (comprensión, planificación, puesta en marcha del plan y validación). En 1985, Schoenfeld implementó una investigación centrada en analizar el desarrollo del pensamiento matemático en el alumnado. El objetivo de esta era caracterizar el significado de pensamiento matemático y documentar cómo el estudiante adquiere la competencia en resolución de problemas. En base a este trabajo, propuso un marco de análisis que constaba de cuatro dimensiones: el uso de recursos matemáticos, el uso de estrategias heurísticas, las estrategias ligadas a la metacognición y las ligadas a la resolución de problemas.

En el ámbito español también se han realizado estudios en este sentido. Desde comienzos del siglo XX, se inicia la tradición heurística en el trabajo de Puig Adam, *Didáctica de la Matemática Eurística* (Puig Adam, 1956) así como en la serie de libros que este escribió junto a Julio Rey Pastor. También conviene recordar la labor realizada durante los últimos años de la dictadura y los años de la transición por grupos de profesorado que desarrollaron materiales enfocados a enseñar los conceptos y procesos matemáticos a través de la resolución de problemas (tal y como se recoge en Puig, 2008). En este sentido, destaca el proyecto curricular realizado por el Grupo Cero para el alumnado de entre 12 y 16 años (Grupo Cero, 1984). Entre los trabajos de investigación relativos a la resolución de problemas, conviene recordar la aportación de Puig y Cerdán (1995) en relación con la interpretación y clasificación de problemas aritméticos escolares. También conviene destacar el papel de las nuevas tecnologías tanto en las investigaciones como en las propuestas metodológicas ligadas a la resolución de problemas. Por ejemplo, en los trabajos de Arnau y colaboradores (Arnau,

Arevalillo y González-Calero, 2014; González-Calero et al. 2015), se presenta y analiza la implementación de un sistema tutorial inteligente para el aprendizaje de resolución de problemas. Estos sistemas resultan adecuados ya que predicen la estrategia escogida por el alumnado y son capaces de ofrecer ayuda personalizada en función de esta. Además, desde el punto de vista de la investigación, el entorno tecnológico resulta idóneo para recopilar datos para su posterior análisis.

Recogiendo estas tendencias marcadas por la investigación dentro de un contexto educativo en el que se potencia el desarrollo de competencias desde la perspectiva STEAM, las instituciones y las políticas educativas vienen apoyando durante los últimos años una enseñanza de las matemáticas donde se concede relevancia a la resolución de problemas contextualizados. En Estados Unidos, la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) propuso un conjunto de estándares básicos para desarrollar una educación matemática donde la resolución de problemas tiene un papel fundamental como proceso transversal a los contenidos. En Europa se desarrolló el proyecto Wiskobas (Treffers, 1987), que buscó modernizar la educación matemática en los Países Bajos siguiendo los principios de la Educación Matemática Realista (EMR, Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2014). Esta corriente, basada en los trabajos de Freudenthal (véase, por ejemplo, Freudenthal, 1991), interpreta las matemáticas como una actividad humana que es útil para comprender el mundo. De esta forma, la EMR propone que las matemáticas escolares no se aprendan como un sistema cerrado, sino como una actividad de matematización. Esta debe entenderse de forma dual, ya que integra dos procesos (Treffers, 1987): i) uno de matematización horizontal, en el que el alumnado utiliza las matemáticas para organizar situaciones y aplicarlas a problemas planteados en contextos extramatemáticos. ii) un segundo proceso de matematización vertical, en el que se establecen relaciones entre diferentes contenidos para generar conocimiento. Así, la actividad de matematización propuesta por la EMR apuesta por un desarrollo de destrezas orientadas a la resolución de problemas contextualizados. En este sentido, debe mencionarse también la propuesta desarrollada en el proyecto KOM para la mejora de la educación matemática en Dinamarca (Niss y Højgaard, 2011) y que ha sido adaptada para definir el marco teórico asociado a las pruebas de evaluación PISA (OECD, 2013). Bajo esta perspectiva, el aprendizaje matemático se apoya en ocho destrezas que son transversales a los contenidos y cubren desde el razonamiento y el trabajo con lenguaje formal hasta la resolución de problemas

y la modelización. Estas destrezas, activadas de forma integrada, permiten utilizar un conocimiento matemático experto para resolver problemas planteados en diferentes contextos.

Las aportaciones de propuestas como la EMR y el proyecto KOM ponen de manifiesto que la introducción de problemas contextualizados en el aula va acompañada de cierta reinterpretación de la enseñanza de las matemáticas. Como señala Niss (1999), no hay una transferencia automática entre un conocimiento matemático fuerte y la habilidad de resolver situaciones no rutinarias. Por tanto, uno de los intereses de trabajar en las aulas problemas contextualizados radica en la importancia de introducir en el aula las aplicaciones de las matemáticas y la modelización. El interés de trabajar esta última de forma específica en el aula ya ha sido manifestado por los investigadores a lo largo de los años. En efecto, ya en los inicios del siglo XX, Felix Klein, primer presidente del ICMI (International Commission on Mathematical Instruction), introdujo el debate sobre el imprescindible equilibrio entre matemática pura y aplicada en la escuela. A finales de los años 60 del siglo pasado, se volvió a reivindicar la importancia de centrar la enseñanza de las matemáticas en sus aplicaciones durante el simposio “Why to teach mathematics as to be useful”, organizado por Freudenthal en 1968 (Pollak, 1968) que, de alguna forma, marcó el origen de la corriente de la EMR antes mencionada. Durante los treinta años siguientes, se desarrollaron diversos enfoques a nivel internacional sobre la enseñanza de las matemáticas basada en la modelización y las aplicaciones, donde se distinguen diferentes objetivos didácticos, descritos en el trabajo de Blum y Niss (1991), que aportan argumentos relativos a la importancia de la modelización en la enseñanza. Estos enfoques se basan en diferentes perspectivas sobre la modelización y, aunque existen diferencias entre las distintas interpretaciones, todas comparten elementos comunes a la hora de entender el proceso de modelización. En particular, los investigadores e investigadoras en educación matemática han consensuado considerar la modelización como un proceso basado en un conjunto de etapas que conforman el ciclo de modelización (puede verse una síntesis de algunas de ellas en el trabajo de Borromeo-Ferri, 2006). En la práctica, este ciclo puede no seguirse de forma lineal (Ärlebäck, 2009), pero la interpretación procesual de la modelización proporciona acciones que el alumnado lleva a cabo cuando aborda el proceso de modelización y, en consecuencia, da información sobre qué tipo de tareas son adecuadas para desarrollar las destrezas de modelización (véanse en este sentido Borromeo-Ferri, 2018 o Lesh et al., 2000).

En España se han recogido algunos de los enfoques sobre modelización para la investigación y la puesta en práctica de experiencias sobre ello en diferentes niveles educativos. Destaca en este sentido la aportación desde la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, que interpreta la matemática, y por tanto la modelización, como una actividad humana (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997). Este marco teórico permite analizar el proceso de desarrollo y uso de un modelo para el diseño de propuestas didácticas sobre modelización en formación de profesorado (Barquero et al. 2015), educación secundaria (García et al, 2006) y nivel universitario (Barquero, 2015). También en educación superior y ya desde una perspectiva STEAM (Pérez et al., 1999) hacen una propuesta didáctica basada en la modelización para trabajar de forma integrada las matemáticas y la física en el primer curso de titulaciones de ingeniería. Al nivel de la educación secundaria, existen experiencias e investigaciones orientadas a facilitar la labor del profesorado para trabajar la modelización. En este sentido, Cabassut y Ferrando (2017) investigan las dificultades que presenta el profesorado para trabajar la modelización en el aula en comparación con su homólogo francés. En cuanto a la puesta en práctica de experiencias de aula, Bua (2015) analiza una intervención didáctica basada en la modelización de diferentes fenómenos físicos para introducir el trabajo con funciones. Gallart (2016), por su parte, investiga la metodología idónea para trabajar tareas de modelización diseñadas desde diferentes perspectivas, con el fin de conocer la importancia de la modelización en el desarrollo matemático del alumnado de secundaria. Por su parte, Ortega-Pons (2018) observa la utilidad potencial de las herramientas tecnológicas para apoyar el aprendizaje de la modelización basada en funciones.

Es destacable que en cualquier trabajo basado en modelización matemática, el diseño de las tareas que se proponen para activar el proceso juega un papel fundamental, por lo que el análisis de cierto tipo de tareas ha resultado relevante para algunas aportaciones hechas por la investigación. En particular, los problemas de Fermi, consistentes en preguntas abiertas que requieren hacer hipótesis y cálculos aproximados sencillos para estimar cantidades relevantes, han sido objeto de estudio por diferentes autores. Albarracín y Gorgorió (2014) constatan la potencialidad de este tipo de problemas para discutir estrategias de resolución de problemas en educación secundaria. Del mismo modo, Ferrando et. al. (2017) observan que el análisis de resoluciones de un tipo particular de estos problemas pone de manifiesto diferencias en los modelos producidos por alumnado con distintos niveles de experiencia en modelización. En todos los

casos se constata la importancia del trabajo en el aula para desarrollar destrezas de modelización.

En conclusión, se observa que en un contexto social donde las exigencias de la ciudadanía actual y el desarrollo integrado de las disciplinas científico-técnicas, el desarrollo de las competencias STEAM deben ser parte de la formación del alumnado en las enseñanzas obligatorias y bachillerato. Por tanto, la educación matemática tiene el compromiso de apostar por modelos formativos que apoyen una enseñanza matemática compatible con la interdisciplinaridad, de forma que el conocimiento matemático surja como respuesta a problemas que se plantean asociados a las ciencias, la tecnología y la ingeniería. La modelización es una destreza inherente a este tipo de modelos educativos, por lo que debe promocionarse el trabajo con tareas de modelización en las aulas de las enseñanzas obligatorias. En este sentido, surge el reto de impulsar el desarrollo de la competencia matemática desde metodologías que impulsen la resolución de problemas, de manera que se pongan de manifiesto tanto la aplicabilidad de los contenidos matemáticos en el ámbito STEAM como el interés de los procesos característicos de las matemáticas. Este texto proporciona ejemplos de cómo se está trabajando en este sentido.

2.2. Matemáticas y TIC

El impacto de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) en la sociedad actual es evidente, ya que la tecnología aporta elementos sustantivos inherentes al desarrollo en todas las esferas de la vida. Las últimas décadas están marcadas por el uso extensivo de ordenadores y la aparición de internet, así como la irrupción de los dispositivos móviles y los servicios en la nube. Es de esperar que en un futuro próximo esta evolución digital no se detenga y aparezcan nuevas aplicaciones basadas en desarrollos como la inteligencia artificial, el análisis de *big data*, la realidad virtual o el internet de las cosas. La educación y, específicamente, el aprendizaje de las matemáticas, no pueden ser ajenas a los cambios que nos conducen hacia una sociedad más tecnificada y digitalizada.

El aprendizaje de las matemáticas no puede ser ajeno a los cambios que nos conducen hacia una sociedad más tecnificada y digitalizada

En este sentido, la competencia matemática de la ciudadanía puede ser una de las claves que les permita adaptarse con éxito a las nuevas demandas que plantea

una sociedad altamente tecnificada. Las matemáticas ofrecen una forma de interpretar el mundo que nos rodea abstrayendo la estructura conceptual detrás de las tecnologías y permite interaccionar con ellas desde una perspectiva de dominio de relaciones y procesos necesarios para su uso. Los desarrollos tecnológicos actuales han evolucionado hacia interfaces muy asequibles para los usuarios y usuarias, con lo que es común confundir usabilidad con dominio y **se extiende la creencia de que el alumnado de las nuevas generaciones puede extraer todo el provecho de la tecnología sin una base de conocimiento adecuada**. Uno de los retos actuales desde la perspectiva de la educación matemática es proporcionar al estudiantado un conjunto de conocimientos matemáticos que den soporte a la interacción con las tecnologías para permitir un desarrollo completo de las competencias digitales dentro de una formación integral del alumnado en tanto que parte de la ciudadanía.

A partir de este proceso de desarrollo tecnológico, en las aulas han irrumpido las tecnologías del aprendizaje y el conocimiento (TAC) a una velocidad vertiginosa. La rapidez en el cambio no permite en todos los casos habilitar los espacios de reflexión adecuados, iniciando una dinámica en la que la novedad es el principal valor de las TAC adoptadas por centros o profesorado, dejando en segundo término la potencialidad didáctica real de cada propuesta. Aun en una sociedad tan tecnificada como la nuestra, existe una percepción popular de que las matemáticas son una disciplina abstracta por naturaleza y, en consecuencia, desconectada de la realidad. Evidentemente, esta idea puede estar basada en algunas de las características de las matemáticas como conjunto de conocimientos, pero es necesario distinguir la propia naturaleza de la disciplina de la forma en la que es aprendida. Por este motivo, la irrupción de las TAC en las aulas no debe sustituir a aquellas propuestas educativas ya contrastadas que inciden directamente en el aprendizaje sostenido de las matemáticas.

Ya Piaget (1952) sugería que los niños y niñas en sus primeras etapas no poseen la madurez mental suficiente para comprender los conceptos matemáticos abstractos presentados exclusivamente a partir de palabras o símbolos. Para que se produzca el aprendizaje deseado, es necesario que el alumnado de las primeras etapas educativas acumule experiencias con objetos, materiales manipulativos, herramientas o dibujos, ya que su principal fuente de aprendizaje proviene de sus capacidades perceptivas. Diversos estudios muestran que los materiales manipulativos benefician el aprendizaje de las matemáticas bajo las condiciones adecuadas, eligiendo los materiales pertinentes para cada tipo de contenido a

trabajar e incorporándolos al trabajo de aula de forma sostenida en el tiempo y no anecdóticamente (Carbonneau, Marley y Selig, 2013).

La eficacia para la enseñanza de las matemáticas de los materiales manipulativos didácticos viene sostenida en el tiempo por un gran número de estudios recogidos en diversos metaanálisis (Sowell, 1989; Carbonneau, Marley y Selig, 2013). Por ello, es necesario que incluso en tiempos digitales, el alumnado empiece a aprender matemáticas en entornos analógicos, para que pueda aprovechar con éxito los recursos cognitivos de los que dispone. En consecuencia, se debe seguir potenciando que tenga a su alcance materiales manipulativos y herramientas tangibles que permitan establecer las bases de los conocimientos a desarrollar. Materiales como las regletas Cuisenaire, la regla de medir o el compás deben estar presentes en las aulas y el profesorado debe conocerlos y poder basar sus propuestas didácticas en ellos. Una de las tecnologías bien establecidas en las aulas es la calculadora, que se puede usar directamente en la resolución de problemas y para revisar errores, pero que también permite otros usos como explorar relaciones numéricas. Como toda herramienta, es indispensable aprender a utilizarla para que el alumnado no la considere un sustituto del razonamiento matemático, pero las posibilidades que ofrece para agilizar procesos de cálculo en las aulas y para que los alumnos puedan centrarse en la comprensión de los nuevos conceptos siguen siendo relevantes en la actualidad.

A medida que el alumnado gana en capacidad de abstracción, la potencialidad didáctica de las TAC es más clara. En múltiples casos, los recursos digitales proporcionan representaciones tan significativas para el estudiantado como la que proporcionan los recursos manipulativos (Yerushalmy, 2005). La investigación indica que las representaciones basadas en la tecnología pueden ser incluso más manejables, despojadas de detalles superfluos y flexibles de sus contrapartidas físicas.

La naturaleza de las TAC es muy variada. Disponemos de múltiples dispositivos digitales como tabletas, cámaras fotográficas o sensores, pero también programas como simuladores, entornos geométricos, programas de representación gráfica de funciones, videojuegos o editores de mapas conceptuales. Esta variedad dificulta el análisis del impacto de cada una de estas tecnologías en las aulas, así como supone un impedimento para el conocimiento experto del profesorado, ya que el uso de tecnologías en las aulas requiere de un conocimiento didáctico que va más allá del conocimiento de su simple uso.

Proporcionar una experiencia significativa de razonamiento deductivo para el alumnado es un reto. Diversas investigaciones han documentado que este no ve por sí mismo la necesidad de trabajar en su razonamiento matemático, ya sea por la dificultad de utilizar pruebas de tipo deductivo o que no distinguen entre diferentes formas de razonamiento matemático, como pueden ser la explicación, la argumentación, la verificación o la prueba (Dreyfus, 1999). Los motivos de estas dificultades se basan en la necesidad de coordinar diversas competencias que son difíciles de dominar de forma individual. Por ello, disponer de entornos como los que proponen las TAC permite agilizar los procesos matemáticos y evidenciar las consecuencias de las acciones matemáticas, fomentando la reflexión sobre el razonamiento.

Un caso paradigmático lo encontramos en el campo de la geometría. Desde la década de 1980 existen programas informáticos que permiten trabajar con construcciones geométricas elaboradas por el alumnado y que pueden ser manipuladas para favorecer su comprensión. Los programas de geometría dinámica permiten observar las relaciones que se establecen entre los diferentes elementos que conforman una construcción geométrica a partir de la experimentación directa y superan a las representaciones físicas a partir de la interacción que permiten con los constructos que pueden representar. Los primeros programas de geometría dinámica (Cabri, Sketchpad, Cinderella...) sentaron las bases y actualmente encontramos programas muy polivalentes como GeoGebra, en el que la interacción del estudiante puede cubrir elementos geométricos, algebraicos y relaciones funcionales. Estas propuestas que engloban distintos contenidos matemáticos presentan ventajas desde la perspectiva de la formación del personal docente, ya que una misma herramienta puede ser utilizada con propósitos distintos, pero también para la autorregulación del aprendizaje del propio alumnado, que puede evaluar sus propios progresos. El caso de GeoGebra, que ha permitido la creación de una amplia comunidad de usuarios entre el profesorado y los investigadores educativos, y para el que existe base científica para consolidar su uso en las aulas, es el ejemplo de la forma en la que la comunidad educativa debería dirigir esfuerzos para validar las TAC a adoptar en el futuro y permitir que sean accesibles al máximo del alumnado posible.

El escenario actual respecto a la relación de la ciudadanía con la tecnología demanda que el estudiantado tome también el papel de creador. La programación y el pensamiento computacional son clave para satisfacer las necesidades

de una sociedad digital. Es necesario especificar que no todo el alumnado debe dominar la programación como técnica orientada al mercado laboral, pero sus fundamentos comparten características que merecen atención por ellas mismas. De hecho, la computación presenta aspectos comunes con el aprendizaje de las matemáticas en lo que a las exigencias de razonamiento y las competencias de resolución de problemas se refiere. El dominio de los fundamentos computacionales puede reforzar algunos aprendizajes matemáticos, como la reformulación de problemas para que puedan ser abordados usando un ordenador, representar datos de forma abstracta, automatizar el pensamiento algorítmico e identificar, analizar e implementar posibles soluciones para conseguir la más eficiente (ISTE, 2016). Solucionar problemas con ayuda del ordenador es un ejercicio que permite adquirir la costumbre de enfrentarse a problemas predefinidos de una forma rigurosa y sistemática. No obstante, las competencias en computación podrían permitir la inclusión de conocimientos matemáticos que no se encuentran en las etapas de educación obligatoria, como la resolución de ecuaciones sin métodos algebraicos de resolución concretos a partir del cálculo numérico.

Solucionar problemas con ayuda del ordenador es un ejercicio que permite adquirir la costumbre de enfrentarse a problemas predefinidos de una forma rigurosa y sistemática

Para introducir la programación, Scratch se presenta como una herramienta amigable que ha mostrado su efectividad (Kim, Choi, Han y So, 2012), que puede ser utilizada por alumnado de toda la educación primaria y específicamente diseñada para que el estudiantado pueda familiarizarse con actividades de razonamiento computacional desde edades tempranas. Scratch se diseñó inicialmente para permitir que el alumnado pudiera diseñar sus propios videojuegos, pero se ha usado para trabajar aquellos contenidos matemáticos que aparecen de forma natural al definir los objetos y el tipo de interacciones que conformarán el videojuego. Desde el punto de vista de la formación de maestros y maestras de educación primaria, se da la paradoja de que los contenidos de computación no han estado presentes en sus planes de estudio. Sin embargo, la realidad es que la sociedad demanda que el alumnado esté preparado para los nuevos retos que deparan los tiempos futuros, y eso incluye desarrollar competencias relacionadas con el pensamiento computacional.

2.3. Evaluación de las matemáticas en las enseñanzas obligatorias y el bachillerato

La evaluación es una actividad de especial relevancia para la educación matemática en las enseñanzas preuniversitarias, debido tanto a la complejidad que entraña el proceso de evaluación como a las repercusiones que involucran sus resultados. Sin embargo, a pesar de su interés y potencialidad como herramienta de mejora, el interés por la evaluación en educación matemática es relativamente reciente. En un estudio de la Comisión Internacional sobre Instrucción Matemática (ICMI study), Niss (1993) señaló la brecha existente entre la innovación sobre metodologías de enseñanza en contraste con las prácticas de evaluación, que se mantenían en planteamientos tradicionales en los años noventa. No obstante, a lo largo de las tres últimas décadas se ha ido prestando atención creciente a la evaluación en el ámbito de la educación matemática, debido principalmente a la entrada en escena de estudios comparativos a nivel internacional (pruebas PISA o TIMSS) y la progresiva instauración de pruebas de evaluación a nivel autonómico (reválidas), cuyos resultados cada vez alcanzan mayor repercusión. Esta importancia que se concede a los resultados de pruebas diagnósticas ha llevado a los diferentes agentes educativos a interesarse por la evaluación, dando lugar a numerosos trabajos que la abordan desde diferentes perspectivas (por ejemplo, Niss y Højgaard, 2011; NCTM, 2000; Pajares, Sanz y Rico, 2000).

Antes de enfocar la discusión sobre el aula de Matemáticas, es procedente reflexionar sobre el significado del término evaluación. La UNESCO (2015) la define como:

Una valoración, lo más sistemática e imparcial posible, de una actividad, proyecto, [...]. Incide principalmente sobre los logros esperados y alcanzados [...] a fin de entender los logros o la ausencia de éstos [...], facilitando la incorporación oportuna de los hallazgos, recomendaciones y lecciones en los procesos de toma de decisiones (pp. 4-5).

Esta concepción pone de manifiesto varias características del proceso de evaluación que deben tenerse presentes en educación matemática:

- a) **Evaluar implica valorar.** La evaluación puede no ser objetiva debido a la complejidad de actores e interacciones involucrados en el aprendizaje del alumnado de las enseñanzas obligatorias y el bachillerato. Sin embargo, la evaluación debe buscar la imparcialidad y basarse en evidencias, lo que

hace necesarios el juicio crítico y el rigor del evaluador. En particular, el profesorado de Matemáticas debe estar formado para aplicar una evaluación de calidad.

- b) Debe **determinarse con precisión el objeto de la evaluación**: una actividad, un proyecto, etc. En los procesos de enseñanza y aprendizaje intervienen gran cantidad de agentes y factores y una valoración adecuada de dichos procesos debe cubrir todos los elementos que intervienen en ellos (Rico, 1990). Es habitual, sin embargo, dirigir la evaluación sobre los dos agentes principales: el alumnado, a través de los resultados de su aprendizaje, y el profesorado, a través de su práctica de enseñanza (Niss, 1993; Van den Heuvel-Panhuizen, 1996). En consecuencia, la evaluación en Matemáticas debe atender al menos a estos dos elementos.
- c) La evaluación está **vinculada a la consecución de logros**, por lo que su éxito (eficacia y fiabilidad) depende de la cantidad y la claridad con la que estén determinados esos logros. En las enseñanzas preuniversitarias, lo hacen por la normativa curricular.
- d) El proceso de evaluación surge con un propósito que lo genera. En este sentido, sí hay consenso en que esta intención implica la **mejora del aprendizaje de las matemáticas** (Norverdt y Buchholtz, 2018).

Esta reflexión permite concluir que la evaluación en la educación preuniversitaria es una práctica orientada a la mejora del aprendizaje matemático, que está condicionado por el currículo y debe atender tanto a los resultados del mismo como a las prácticas de enseñanza. La presente sección se estructura en torno a la discusión de cuestiones de interés sobre la evaluación en el aula de Matemáticas teniendo en cuenta los siguientes elementos: en primer lugar, se analiza la evaluación de los resultados de aprendizaje del alumnado, desde la conceptualización y evaluación de la competencia matemática hasta la problemática que se plantea en el modelo basado en la evaluación de competencias básicas en el ámbito preuniversitario. En segundo lugar, se aborda la evaluación de la labor profesional del docente, haciendo hincapié en la importancia de la reflexión crítica del docente y la aportación de los diferentes grupos de interés y de algunas herramientas de la investigación educativa. Finalmente, se extraen conclusiones y se formulan los retos a conseguir para potenciar el uso de la evaluación como una herramienta de mejora para la educación matemática.

2.3.1. Evaluación de resultados de aprendizaje

La valoración de los resultados de aprendizaje del alumnado es la práctica de evaluación más común en el aula de Matemáticas y, como tal, es objeto continuo de estudio por parte del personal educador e investigador. En este contexto, su valor como herramienta para la mejora del aprendizaje debe conferir un carácter esencialmente formativo a la evaluación, de manera que esta quede integrada en las prácticas de enseñanza como parte de la actividad docente (NCTM, 2000). De este modo, de acuerdo con Freudenthal (1985), todo el proceso educativo debe entenderse como un proceso de evaluación, que aporte valor no solo por la información retrospectiva que proporciona (¿qué han aprendido los estudiantes?), sino por su potencialidad prospectiva (¿qué pueden aprender a partir de ahora?, Van den Heuvel-Panhuizen, 1996).

En el contexto educativo en España, el coste formativo de la evaluación debe concebirse desde su aporte al desarrollo competencial. En efecto, el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato orienta el aprendizaje de los estudiantes en el periodo preuniversitario a la adquisición y desarrollo de un conjunto de competencias clave. Este modelo, que se fundamenta en el “saber hacer” en situaciones contextualizadas, obliga a reorientar la evaluación hacia una valoración sobre el grado de adquisición y desarrollo de dichas competencias. Para el profesorado de Matemáticas, esta situación genera un conflicto doble.

- a) En primer lugar está la interpretación de la competencia matemática. Atendiendo al Real Decreto 1105/2014, esta competencia es:

La habilidad para desarrollar y aplicar el razonamiento matemático con el fin de resolver problemas diversos en situaciones cotidianas; en concreto, engloba los siguientes aspectos y facetas: pensar, modelar y razonar de forma matemática, plantear y resolver problemas, representar entidades matemáticas, utilizar los símbolos matemáticos, comunicarse con las Matemáticas y sobre las Matemáticas, y utilizar ayudas y herramientas tecnológicas (p. 389).

Esta definición incluye capacidades matemáticas como modelización o razonamiento, entre otras, que añaden al extenso currículo un nuevo bloque de contenidos.

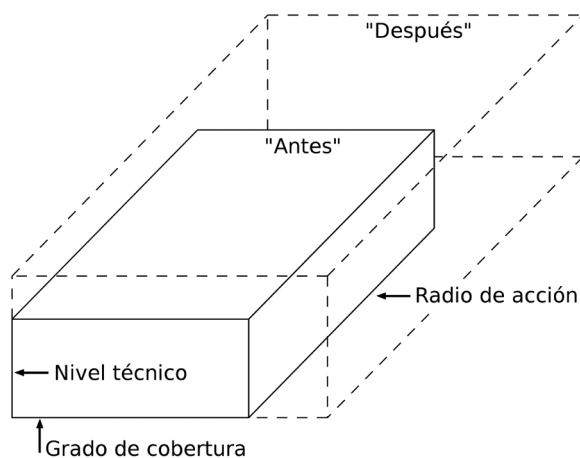
- b) En segundo lugar está el **contraste entre el carácter global de la evaluación por competencias**, basadas en conocimiento interdisciplinar presentado en contexto, **frente al carácter local de la evaluación** que se puede desarrollar dentro de una única asignatura. Este contraste queda potenciado por la propia normativa curricular que, paralelamente al modelo por competencias, propone un conjunto de estándares de aprendizaje que no solo se relacionan con un único contenido, sino que atomizan más aún los focos de la evaluación.

En síntesis, el modelo por competencias plantea interrogantes sobre evaluación que debe abordar el profesorado de Matemáticas: ¿cómo debe entenderse la competencia matemática para la evaluación en el aula? ¿Cómo puede el profesorado de Matemáticas evaluar todas las competencias clave? ¿Cómo gestionar instrumentos y procedimientos de evaluación que consideren simultáneamente estándares y competencias? A continuación, se proporcionan ideas para responder a estas cuestiones desde una perspectiva formativa.

¿Cómo debe entenderse la competencia matemática para la evaluación en el aula?

La noción de competencia matemática propuesta en el currículo, basada en el marco PISA 2012 (OCDE, 2013), introduce procesos y capacidades matemáticas transversales a los conceptos matemáticos escolares, por lo que su evaluación no puede concebirse como un procedimiento de valoración de conocimientos sobre los contenidos, sino que debe incluir expectativas de aprendizaje vinculadas a acciones como “*pensar, modelar y razonar de forma matemática*”. La conceptualización de dichas expectativas de aprendizaje ha sido analizada desde diferentes enfoques a nivel nacional y europeo, dando lugar a diferentes propuestas que facilitan el abordaje de la evaluación de la competencia matemática.

Figura 3. Visualización del progreso en una subcompetencia según la propuesta del proyecto KOM



Fuente: Niss y Højgaard, 2011.

Una de las más destacadas es la **propuesta del proyecto KOM** (Niss y Højgaard, 2011), que se basa en **interpretar la competencia matemática en clave de subcompetencias⁷ transversales** a los contenidos: representación, uso de símbolos y formalismo matemático, comunicación, uso de herramientas, razonamiento, modelización, planteamiento de problemas y pensamiento matemático. Estas subcompetencias deben entenderse como una potencialidad para actuar de forma eficaz, por lo que la evidencia de poseer una de ellas se observa cuando el estudiantado desarrolla tareas matemáticas complejas (resolver un problema, construir o entender un modelo matemático o comprender un razonamiento) teniendo en cuenta que, en general, una tarea activa diferentes subcompetencias. Se asume también que cada una se evalúa de forma independiente a las demás y que debe prestarse atención a la progresión en el desempeño de la misma. De este modo, el diseño de instrumentos de evaluación de una subcompetencia consiste en la búsqueda de tareas que la activen, mientras que el procedimiento con-

⁷ Niss y Højgaard (2011) utilizan *competence* para hablar de la competencia matemática y *competency* para referirse a destrezas como la representación o modelización. Se ha optado por traducir este segundo término como “subcompetencia” para enfatizar que son destrezas más simples que componen la competencia matemática.

siste en valorar el grado de desarrollo que ha alcanzado cada alumno o alumna. Para ello, el proyecto KOM considera tres dimensiones cuantificables:

- Grado de cobertura, que se refiere a la diversidad de tareas que trabajan la subcompetencia que un estudiante es capaz de resolver.
- Radio de acción o diversidad de contextos en los que el alumnado aplica la subcompetencia.
- Nivel técnico o grado de dificultad de las tareas que activan la competencia y el estudiantado puede resolver.

La representación tridimensional del desempeño en estas subcompetencias antes y después de la instrucción matemática permite visualizar la evolución de un estudiante (figura 3). Finalmente, para establecer una calificación para una subcompetencia, se propone calcular el “volumen” de la misma multiplicando las tres dimensiones asociadas. De esta forma, un buen desempeño en una dimensión puede contrarrestar mayores dificultades en las demás dentro de la evaluación de una subcompetencia. En conjunto, la evaluación de todas las subcompetencias da información completa sobre el grado de desarrollo matemático de un alumno o alumna.

Una segunda propuesta de relevancia para evaluar la competencia matemática en el contexto europeo es la que surgió de la perspectiva de la EMR (Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2014). Este enfoque contempla el trabajo matemático como una actividad de matematización, por lo que interpreta la evaluación de la competencia matemática como una valoración de la capacidad para matematizar en situaciones contextualizadas. De esta forma, la EMR apuesta por tareas de evaluación que hagan visible la capacidad de matematización. Las tareas apropiadas para este fin deben estar:

- Presentadas en contextos que inviten al alumnado a usar las matemáticas para pensar dentro de dichos contextos (Van den Heuvel-Panhuizen, 1996).
- Formuladas de manera que supongan un desafío en lugar de una prescripción (Gravemeijer, 1982).

En este sentido, se recomiendan las tareas de pregunta abierta, ya que permiten (e invitan) al alumnado a hacer todo lo que es posible, de manera que la evaluación suponga información útil sobre qué se puede aprender. La EMR confiere asimismo prioridad a la labor de observación del profesorado como herramienta efectiva de evaluación.

Una tercera aproximación a la evaluación de la competencia matemática se fundamenta en el **proceso de modelización**. Este enfoque interpreta la aplicación de “razonamiento matemático para resolver problemas contextualizados”, que señala el Real Decreto 1105/2014, como el desarrollo de diferentes actividades relacionadas con la asociación de ideas matemáticas a contextos extramatemáticos, la extracción de conclusiones en dichos contextos y la interpretación y evaluación de estas conclusiones. Bajo esta perspectiva, los instrumentos de recogida de información para la evaluación se construyen a partir de tareas de modelización (Gallart, 2016, propuso una revisión de diferentes enfoques al respecto). En cuanto al procedimiento de evaluación, existen diferentes focos de atención:

- En el contexto norteamericano, la evaluación está más orientada a valorar el producto final de la modelización. Un ejemplo de instrumento que sigue este planteamiento es el constituido por las guías de garantía de calidad (Quality Assurance Guide), que proponen evaluar modelos matemáticos a partir de indicadores basados en su grado de adecuación al problema propuesto, su potencialidad para ser generalizado y sus posibles reutilizaciones para otras situaciones (véase Lesh y Clarke, 2000).
- En el contexto europeo, se concede mayor relevancia al proceso de modelización. En este sentido, el proyecto Learning and Education in and through Modelling and Applications (LEMA, véase Maaß y Gurlitt, 2010) propuso una rúbrica en torno a cinco categorías, donde cuatro de ellas valoran las fases del proceso de modelización (establecer el modelo, trabajar con precisión, interpretar, validar y reflexionar). Por su parte, Borromeo-Ferri (2018) planteó la evaluación en torno a las siete fases del ciclo completo de modelización (comprensión de la tarea, simplificación / estructuración, matematización, trabajo matemático, interpretación, validación y comunicación del modelo), que da cuenta del conjunto de actividades que debe afrontar el alumnado a la hora de aplicar las matemáticas para dar respuesta a situaciones contextualizadas.

¿Cómo puede el profesorado de Matemáticas evaluar todas las competencias clave? ¿Cómo gestionar instrumentos y procedimientos de evaluación que consideren simultáneamente estándares y competencias?

La cuestión sobre la potestad del profesorado de Matemáticas para evaluar las competencias clave en las enseñanzas preuniversitarias es una cuestión contro-

vertida, que supone un desafío compartido con los docentes del resto de disciplinas. En este sentido, la normativa curricular actual no proporciona pautas claras de evaluación por competencias ni tampoco aporta orientaciones sobre cómo se debe evaluar el uso de conocimientos integrados en situaciones reales con un carácter formativo para el alumnado, orientaciones que serían de interés especialmente en la Educación Secundaria Obligatoria, donde la tendencia a trabajar contenidos por separado es más acusada. El resultado es que se hacen esfuerzos descoordinados para dar respuesta a la necesidad de una evaluación por competencias en un contexto educativo habituado a la evaluación de contenidos.

Figura 4

Criterio de evaluación: C.E.2.14. Observar que en el entorno cercano, hay sucesos imposibles y sucesos que con casi toda seguridad se producen, hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado (posible, imposible) de situaciones sencillas y comprobar dicho resultado.	
Orientaciones y ejemplificaciones: Se pretende evaluar si los niños y las niñas están familiarizados con conceptos y términos básicos sobre el azar: seguro, posible, imposible... y son capaces de hacer estimaciones sobre la posibilidad o imposibilidad de que ocurran sucesos que les son familiares. Puesto que en la mayoría de las ocasiones la probabilidad sirve de sustento a la estadística en la relación de complementariedad que mantienen, buscaremos cauces de aplicación en dicha complementariedad para programar experiencias. En situaciones de juego organizado para el tiempo escolar, los juegos de azar nos brindan ejemplificaciones de iniciación y acercamiento a la adquisición de estos recursos.	
Objetivos del área para la etapa: O.MAT.6. Interpretar, individualmente o en equipo, los fenómenos ambientales y sociales del entorno más cercano, utilizando técnicas elementales de recogida de datos, representarlas de forma gráfica y numérica y formarse un juicio sobre la misma.	Contenidos: Bloque 5: "Estadística y Probabilidad": 5.6. Sucesos posibles y sucesos imposibles. 5.7. Realización de estimaciones sobre algunos juegos y sucesos. 5.9. Confianza en las propias posibilidades y curiosidad, interés y constancia en la interpretación de datos presentados de forma gráfica. 5.10. Curiosidad por comparar los resultados de las estimaciones y la realidad en algunos sucesos.
Competencias: CMCT, SIEP	Indicadores: MAT.2.14.1. Observa que en el entorno cercano hay sucesos imposibles y sucesos que con casi toda seguridad se producen. (CMCT). MAT.2.14.2. Hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado (posible, imposible) de situaciones sencillas y comprobar dicho resultado. (CMCT, SIEP).

Interpretación del tercer criterio del bloque de estadística dentro del segundo ciclo de primaria, según el desarrollo curricular en Andalucía. CMCT y SIEP se refieren a las competencias clave "Competencia Matemática y Competencias Básicas en Ciencia y Tecnología" y "Sentido de la Iniciativa y Espíritu Emprendedor", respectivamente.

Fuente: Junta de Andalucía (2015).

No obstante, desde algunas autonomías se están estableciendo desarrollos curriculares que clarifican términos respecto a la evaluación por competencias. Un ejemplo de ello es la Orden de 17 de marzo de 2015, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía. En su Anexo I (véase Junta de Andalucía, 2015), dicha orden desglosa cada criterio de evaluación del currículo básico en tres criterios de evaluación de ciclo. Para cada criterio de evaluación de ciclo, se proporcionan tablas de desarrollo curricular que establecen las competencias clave que se evalúan con este criterio y proporcionan indicadores para observar el desempeño respecto del criterio de evaluación. Por ejemplo, el criterio de evaluación "Hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado (posible, imposible, seguro, más o menos probable) de

situaciones sencillas en las que intervenga el azar y comprobar dicho resultado” (tercero dentro del bloque de estadística y probabilidad) se interpreta y desarrolla para el segundo ciclo de Educación Primaria como se muestra en la figura 4.

Este tipo de desarrollo curricular proporciona orientaciones para que el profesorado interprete el significado de las competencias en relación con el conocimiento matemático. No obstante, asumir de forma normativa estas orientaciones puede limitar el valor formativo de la evaluación. Por ejemplo, el criterio de evaluación 3 del bloque de contenidos de estadística, comentado anteriormente, proporciona una oportunidad para promover la concienciación del alumnado de primaria en relación con los riesgos que conllevan los juegos de apuestas, lo que permitiría evaluar la competencia social y cívica en el aula de Matemáticas. Atender al desarrollo curricular propuesto en la figura 4 no fomenta implementar este trabajo en el aula, ya que dicha competencia no está relacionada *a priori* con el criterio de evaluación. Esta situación ilustra el hecho de que establecer relaciones directas entre criterios de evaluación (o estándares) y competencias contribuye a concretar la evaluación, pero puede perjudicar su carácter formativo, ya que las competencias que se trabajan y pueden evaluarse en el aula de Matemáticas dependen de la metodología empleada (tareas o contextos usados para dichas tareas) más que de las expectativas de aprendizaje matemático de las que se parte.

Se observa, por tanto, que en contextos educativos en los que se trabaje de forma consensuada, el establecimiento de conexiones entre competencias y criterios de evaluación y estándares de diferentes disciplinas puede ser una vía para el desarrollo eficaz de la evaluación por competencias. En este sentido, la coordinación entre el equipo docente resulta esencial, tanto dentro de las Matemáticas como en conexión con profesorado de otras asignaturas, lo que pone el foco de atención sobre los equipos directivos de los diferentes centros. En los últimos años se están haciendo esfuerzos importantes desde los centros educativos a lo largo de todo el territorio nacional para interpretar el sistema de evaluación por competencias, desarrollar herramientas propias (rúbricas, mapas, criterios y procedimientos de calificación, etc.) y aplicarlas con el fin de valorar la adquisición de las competencias básicas en las enseñanzas preuniversitarias. Este trabajo está suponiendo un proceso de adaptación para el profesorado, que se está desarrollando profesionalmente de forma autodidacta en un gran número de casos. Para que este desarrollo profesional respecto a la evaluación por competencias sea generalizado, se demanda formación adecuada que tiene que promoverse tanto

a nivel de la formación continua docente, por parte de los centros responsables de la misma, como a nivel de formación inicial, por parte de los grados de Magisterio y los másteres de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

2.3.2. Evaluación de la labor profesional docente

El profesorado es un participante esencial del aprendizaje en las enseñanzas obligatorias y el bachillerato, por su papel de organizador y gestor de las experiencias de aprendizaje de su alumnado. En un contexto en el que la evaluación se erige como una herramienta útil para la toma de decisiones sobre educación, es necesario considerar las prácticas de enseñanza como objeto de evaluación. En el aula de Matemáticas, es esencialmente una autoevaluación, que se puede efectuar a partir de procedimientos basados en diferentes elementos: indicadores, autoevaluación reflexiva o valoración de los diferentes grupos de interés.

La evaluación basada en indicadores busca la valoración objetiva de la enseñanza basada en evidencias de características deseables. La investigación en educación matemática ha discutido cuáles son esas características, dando lugar a modelos que permiten establecer criterios de calidad de una propuesta didáctica. Un ejemplo de estos modelos es la idoneidad didáctica introducida por Godino (2011), que se estructura en torno a seis tipos de idoneidad: a) **Epistémica**, que observa la representatividad del contenido que se trabaja en el aula respecto al conocimiento matemático que se quiere enseñar; b) **Cognitiva**, que mide la adecuación de la propuesta al conocimiento inicial del alumnado; c) **Interaccional**, referida a la potencialidad de la propuesta para detectar y solventar necesidades formativas; d) **Mediacional**, que atiende a la pertinencia de los recursos necesarios para implementar la propuesta; e) **Afectiva**, que observa el grado de implicación que la instrucción suscitó en el alumnado; y f) **Ecológica**, relacionada con la integración en el contexto educativo en el que se implementa. Estas seis dimensiones dan cuenta de los diferentes focos de atención a los que se puede atender para la toma de decisiones sobre la implementación de una unidad didáctica. Puede verse un ejemplo práctico de evaluación basada en la idoneidad didáctica de una propuesta para la Educación Secundaria Obligatoria en el trabajo de Beltrán-Pellicer (2015).

Por otra parte, la autoevaluación reflexiva es un recurso útil para el profesorado de Matemáticas, no solo por su valor a la hora de tomar decisiones sobre

la docencia, sino por su poder formativo para el propio personal docente. Las situaciones de aprendizaje en el aula de Matemáticas suelen generar situaciones conflictivas, y el profesorado debe saber identificarlas y articular estrategias racionales para solventarlas (Flores, 2007). Se propone un proceso de valoración reflexiva del equipo docente sobre su propia práctica de enseñanza, que puede promover el uso y desarrollo de dichas estrategias racionales para optimizar su práctica profesional, que acabará revirtiendo en la mejoría del desarrollo y gestión de experiencias de aprendizaje para su alumnado. Una herramienta de utilidad para estructurar la reflexión sobre las prácticas docentes en función del contexto educativo es el análisis basado en Debilidades, Amenazas, Fortalezas y Oportunidades (DAFO, Pickton y Wright, 1998). Creado en el ámbito empresarial, como herramienta de análisis estratégico, establece cuatro focos de atención para discernir inconvenientes y ventajas de la implementación de una unidad didáctica en relación con elementos propios y ajenos a la propuesta didáctica. Hay dos tipos de inconvenientes: las debilidades son las características negativas inherentes a la propuesta, mientras que las amenazas son las características del contexto que perjudican la implementación de esta. Del mismo modo, hay dos clases de ventajas: las fortalezas son las características positivas de la propuesta y las oportunidades son las características del contexto que favorecen la práctica de enseñanza. Montejo-Gámez y Amador-Saelices (2017) desarrollaron una unidad de trabajo por competencias que ilustra el uso análisis DAFO para la evaluación de la enseñanza de las matemáticas en Educación Secundaria Obligatoria.

Finalmente, debe considerarse esta evaluación desde los diferentes grupos de interés implicados en la educación matemática. Tradicionalmente se ha venido asumiendo que el éxito de la actividad docente se puede calibrar en términos del rendimiento académico de sus estudiantes. Ciertamente, el aprendizaje adquirido por el alumnado es un indicador de la calidad de la enseñanza recibida, pero la evaluación del profesorado no debe restringirse a la observación de este aprendizaje. El proceso educativo es complejo e involucra a diferentes colectivos que lo contemplan desde perspectivas encontradas: alumnado, profesorado, familias o instituciones. Estos grupos, que se ven de algún modo afectados por la actuación del equipo docente en el aula, proporcionan opiniones diversas que, aunque no deben condicionar al profesorado, pueden orientarle en la toma de decisiones sobre la enseñanza. A este respecto, se pueden emplear diferentes procedimientos de evaluación que recojan

información sobre esta diversidad de puntos de vista, que pueden enriquecer su desarrollo profesional. Para conocer la opinión del alumnado pueden utilizarse encuestas de valoración del profesorado, de forma análoga a como se hace en los centros universitarios. Respecto al resto de docentes, se propone fomentar la coordinación entre departamentos y la inclusión de otros profesores y profesoras en el aula de Matemáticas que favorezca la retroalimentación entre iguales. Por su parte, la tutoría y las asociaciones de madres y padres pueden ser canales de comunicación efectiva que permita conocer la valoración y propuestas de las familias. Por último, el intercambio de información con las instituciones educativas está por encima de la competencia evaluadora del profesorado, ya que la evaluación funcional del personal docente corresponde a la inspección educativa. En este sentido, se propone definir un modelo de conocimiento de profesorado (puede importarse alguno desde la investigación educativa, por ejemplo, el modelo propuesto por Aguilar et al, 2013) que establezca unos fines claros para orientar la evaluación de manera consistente. En cualquier caso, este tipo de evaluación escapa del interés de la presente sección, por lo que se aparca un debate con mayor profundidad.

2.3.3. Conclusiones

La evaluación en el aula de Matemáticas debe, en el contexto curricular actual, concebirse desde una perspectiva formativa. En cuanto a los resultados de aprendizaje del alumnado, la competencia matemática debe entenderse como la valoración del proceso involucrado en dar respuesta a situaciones donde las matemáticas se aplican a situaciones contextualizadas. Para hacer efectiva esta valoración, deben fijarse de antemano las expectativas de aprendizaje (destrezas relacionadas con el proceso o fases de este) y proponerse tareas abiertas que supongan un desafío para el alumnado. Los procedimientos de evaluación deben fundamentarse en la observación del cumplimiento de las expectativas fijadas, buscando que el resultado de la evaluación proporcione información sobre qué capacidad de aprendizaje tiene el estudiantado. Por otra parte, la evaluación formativa de las competencias clave dentro del aula de Matemáticas implica una labor de diseño de herramientas y procedimientos adaptados a una concepción novedosa, que debe ser dirigida por los centros educativos y promovida por las instituciones y por las universidades. En particular, se hace necesario el desarrollo de actividades de formación continua e inicial del profesorado de Matemáticas que fomente la capacidad de desarrollo de herra-

mientas de evaluación propias. Por otra parte, la revisión del currículo que reduzca la cantidad de contenidos y fomente la incidencia de las matemáticas en otras disciplinas potenciaría el sentido de la evaluación por competencias y facilitaría su implementación efectiva. En cuanto a la evaluación de las prácticas de enseñanza del profesorado, se ha observado que esta debe ser una práctica generalizada, ya que no solo permite tomar decisiones sobre la enseñanza, sino que también contribuye al desarrollo profesional del docente. Una evaluación efectiva de la práctica profesional se ve potenciada por la coordinación entre profesorado y el uso de herramientas desarrolladas por la investigación.

La discusión desarrollada deja de manifiesto que educador, investigador e instituciones afrontamos el reto de emplear la evaluación como herramienta efectiva para apoyar el proceso de aprendizaje de las matemáticas y que sirva para concretar o adaptar el currículo a los conocimientos del alumnado y conseguir así perfeccionar el trabajo docente. Es esencial, con este fin, que los procesos de evaluación se apoyen en tres pilares fundamentales: la coordinación entre profesionales de la enseñanza, la formación del profesorado y el apoyo de la investigación educativa.

Emplear la evaluación como herramienta efectiva para apoyar el proceso de aprendizaje de las matemáticas y que sirva para concretar o adaptar el currículo a los conocimientos del alumnado y conseguir así perfeccionar el trabajo docente

3. ENSEÑANZA

En esta sección se trata la formación inicial de docentes de primaria. La formación inicial del profesorado de educación secundaria se aborda en el capítulo de educación universitaria en el apartado del máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. En el mismo capítulo también se tratan los grados que dan acceso al mismo. La última parte de esta sección se dedica al desarrollo profesional (la formación permanente y continua).

3.1. La formación inicial de maestros de Educación Primaria

Los diferentes estudios TIMSS (Trends International Mathematics and Science Study) han puesto de manifiesto diferencias y deficiencias en el conoci-

miento matemático del estudiantado de cuarto curso de Educación Primaria⁸ de los distintos países (véase tablas 1, 2 y 3 de la sección *Educación matemática en la Educación primaria* en este capítulo). En ellos, España se sitúa claramente por debajo de la media de los países participantes de la Unión Europea y la OCDE. Este hecho apunta la necesidad de revisar la enseñanza de las matemáticas en nuestro sistema educativo y a situar el foco de atención en la formación inicial de los futuros docentes para garantizar la calidad de la educación de sus futuros alumnos.

Este capítulo se centra en tratar aspectos ligados a la formación inicial en Matemáticas de los y las maestras de primaria. Los estudios de grado de formación inicial en Magisterio tienen denominaciones distintas según las facultades, para simplificar el texto se denominan Grados de Maestro (GdM). No se puede obviar que existen diferencias entre universidades y comunidades autónomas, sin embargo, dado que no se trata de dar una información exhaustiva, se dará en este texto una visión general, centrándolo en las particularidades de aquellos casos considerados de interés.

En primer lugar, se describe el perfil de los estudiantes que acceden al Grado de Maestro, dado que se considera un aspecto que tiene implicaciones importantes en el nivel matemático de los egresados y egresadas. La segunda parte de esta sección se centra en dar una visión general sobre el diseño de los GdM particularizando en la formación en Matemáticas. Finalmente, se trata el acceso a la profesión, incidiendo en el diseño de las pruebas de los concursos públicos.

El acceso a los GdM puede realizarse por tres vías: estudiantes que han finalizado Bachillerato y han superado las EBAU (Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad), que han superado un ciclo superior de Formación Profesional o que proceden de otros grados. Lamentablemente, no es fácil acceder a los datos relativos al acceso de las personas que se matriculan en primer curso del GdM. Sin embargo, en base a la experiencia reciente, se ha observado que una parte considerable del alumnado abandonó las Matemáticas al finalizar la Educación Secundaria Obligatoria (o bien porque acceden desde ciclos de Formación Profesional o bien por haber cursado el Bachillerato de Humanidades)

⁸ En realidad, el estudio analiza también el rendimiento de estudiantes de educación secundaria, pero nuestro país se limita a participar en las pruebas de 4º de primaria.

y que solo una pequeña proporción de los que acceden a través de las pruebas de acceso a la universidad (PAU o EBAU) han estudiado el Bachillerato Científico-Tecnológico (en el trabajo de Ruiz de Gauna, García y Sarasua (2013) se presentan algunos datos recogidos en la Universidad de Bilbao). Sin duda, esto tiene implicaciones importantes tanto en la formación inicial en Matemáticas como en la actitud al enfrentarse a estas, ya que puede indicar que los estudios de GdM siguen siendo considerados como una opción más ligada a las ciencias sociales, lo cual puede determinar una carga afectiva por parte del alumnado relativa al interés por las matemáticas.

En efecto, los estudios dirigidos a determinar el conocimiento matemático inicial del alumnado que accede a los GdM siguen evidenciando la necesidad de encontrar estrategias para garantizar una adecuada formación inicial en Matemáticas de los maestros y maestras. A pesar de que el alumnado que accede a los GdM ha superado con éxito todas las etapas educativas previas, son numerosos los estudios que muestran que siguen teniendo dificultades con las matemáticas. En particular, se han evidenciado carencias y dificultades relativas a aspectos esenciales como la proporcionalidad directa y los porcentajes, la aplicación de procedimientos de medida o la interpretación de resultados en situaciones que involucran la magnitud tiempo (Nortes y Nortes, 2013; Arce, Marbán y Palop, 2017).

Estos datos, centrados en los conocimientos matemáticos del alumnado que ingresa en los estudios de GdM, no contrastan con aquellos realizados con los egresados. En efecto, a partir de los resultados obtenidos en los primeros TIMMS, se crea el estudio TEDS-M (Teacher Education Study in Mathematics), desarrollado entre los años 2006 y 2009, con el objetivo de comparar a nivel internacional el conocimiento matemático que ha adquirido el alumnado de Magisterio al terminar su formación. La participación de España en el estudio TEDS-M quedó limitada a analizar la formación inicial en matemáticas de los y las estudiantes de las titulaciones de Magisterio de 48 centros. Para participar, debían cumplir dos requisitos: cursar el último año de la carrera y estar matriculados de un mínimo de 30 créditos. Estos requisitos pretendían asegurar que la muestra del estudio hubiera cursado toda la formación en matemáticas y de didáctica de las matemáticas. En cualquier caso, en el momento en que se realizó el estudio en España (primavera del 2008), las directrices para obtener el título de Maestro/a en Educación Primaria venían fijadas por el Real Decreto 1440/1991. Por tanto, la formación recibida por los y las participantes no es comparable a la que se imparte actualmente en los GdM.

En base a los resultados descritos en Sanz y Martín (2014, p. 78), los resultados en Matemáticas de España (que no dispone, a diferencia de otros países, de profesorado especialista en la materia) se sitúan en el límite inferior de la franja de países con resultados medios, que incluye a EE. UU., Suiza, Noruega y Alemania entre los países próximos a nuestro entorno socioeconómico y cultural. Los resultados de conocimiento de didáctica de las matemáticas son levemente mejores, más cercanos a la media que los de matemáticas, aunque siempre por debajo de países de nuestro entorno. Estos resultados evidencian que las características individuales del alumnado son la causa principal de su rendimiento en Matemáticas. Sin embargo, el conocimiento del equipo docente aparece como la causa más clara entre aquellas no relacionadas con el propio alumnado, mucho más que el contexto social o el tiempo dedicado a la enseñanza de las Matemáticas durante su formación inicial (Rico, Gómez y Cañadas, 2014).

Una vez identificada la problemática existente en cuanto a las carencias matemáticas del futuro profesorado, se pueden analizar diferentes vías para intentar dar respuesta a la misma. Una forma es introducir un requisito de acceso a los GdM, al igual que se ha hecho, tradicionalmente, en los estudios superiores de otras disciplinas tales como Educación Física o Bellas Artes. Castro, Mengual, Prat, Albarracín y Gorgorió (2014) definen el **Conocimiento Matemático Fundamental** (CMF) como el conocimiento disciplinar en matemáticas necesario para seguir con aprovechamiento las materias de matemáticas y de didáctica de las matemáticas, teniendo en cuenta los requerimientos de la práctica profesional y las competencias matemáticas propias de la educación primaria. En Gorgorió y Albarracín (2019) se muestra el desarrollo de una prueba específica para medir el CMF que se ha utilizado con alumnado recién ingresado al GdM desde el curso 2013-14. Los resultados, coherentes con los estudios anteriores, muestran deficiencias en su CMF. Además, se corrobora que los resultados de las pruebas de Matemáticas de las PAU/EBAU no correlacionan con las calificaciones obtenidas en la prueba de CMF. En concreto, se observa que una parte sustancial del alumnado que supera las pruebas Matemáticas de las PAU/EBAU no lo hacen con la prueba de CMF, lo que se pone de manifiesto que su formación matemática previa no asegura un conocimiento inicial de la materia adecuado para afrontar el GdM. Esto evidencia la necesidad de introducir una prueba específica complementaria a las pruebas de acceso a la universidad. Una prueba de este tipo existe en Cataluña desde el 2015 (Prueba de Aptitud Personal, PAP), incluye específicamente una prueba de competencia matemática para medir el CMF

desde el 2017. En Gorgorió, Albarracín y Laine (2019) se observa una mejora estadísticamente significativa del CMF de las personas ingresadas en la UAB el curso 2017-2018 (con una PAP que incluye una prueba específica de CMF) respecto al estudiantado del curso 2016-2017, que pasó una PAP sin prueba específica de CMF. Los buenos resultados derivados de esta experiencia desarrollada en las universidades catalanas abren, sin lugar a duda, el debate sobre la posibilidad de diseñar una prueba de acceso a los estudios de GdM que permita establecer unos mínimos relativos al CMF y que, así, garantice una competencia matemática mínima en los futuros maestros y maestras.

El segundo aspecto que valorar en la reflexión sobre los conocimientos matemáticos del profesorado de primaria es el diseño de los estudios de Diplomatura de Maestro (DdM). Dado que todavía son pocos los maestros y maestras de primaria que han cursado los actuales GdM, conviene revisar brevemente la estructura de las antiguas diplomaturas para analizar con perspectiva su formación matemática.

La reforma general del sistema educativo establecida por la LOGSE supuso una modificación en la duración y la estructura de la Educación Primaria y, por ende, requirió de una revisión de las enseñanzas universitarias de formación inicial de profesorado de primaria. En efecto, el Decreto 1440/1991 estableció el plan de estudios de las diplomaturas de Magisterio atendiendo a las necesidades de la LOGSE. En base al plan de estudios de 1991, se eliminó la figura del maestro especialista en Matemáticas, incluyendo la asignatura en la especialidad en Educación Primaria (generalista). La LRU dejaba cierta autonomía a cada universidad para configurar las titulaciones, así, por ejemplo, en la Universitat de València (UV) se fijó en 198 la cantidad mínima de créditos para obtener el título de Maestro en cualquiera de las especialidades. Además, se optó por fijar un número reducido de asignaturas troncales y obligatorias dando más peso a la optatividad. Así, este plan de estudios incluía una formación bastante pobre de los egresados tanto en Matemáticas como en Didáctica de la Matemática.

Los actuales planes de estudio de GdM son relativamente recientes, en marzo del 2003 se inició, por acuerdo de la Conferencia de Decanos y Directores de Centros con titulaciones de Maestro/a, la constitución de una Comisión de Trabajo para diseñar un proyecto que con el título “*La adecuación de las titulaciones de Maestro al Espacio Europeo de Educación Superior*” fuese presentado para su financiación por la ANECA, en su primera convocatoria de ayudas para el diseño de títulos de grado. En el trabajo de Maldonado (2004), se presenta una síntesis de la

propuesta de estructuración de lo que pasaría a ser el germen del actual GdM y que se describe con detalle en el Libro Blanco de Magisterio (ANECA, 2005).

En el año 2007, se establecen por Orden ECI de 27 de diciembre (BOE de 29 de diciembre) los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habilitan para el ejercicio de la profesión de maestro/a en Educación Primaria. En esta misma orden se crea la estructura modular que adquieren las titulaciones de Grado en Educación Primaria y se establece el catálogo de módulos en los que se distinguen tres tipos: módulo de formación básica (incluye asignaturas como Aprendizaje y Desarrollo de la Personalidad, Procesos y Contextos Educativos; Sociedad, Familia y Escuela, sumando un total de 60 créditos); módulo didáctico y disciplinar que incluye las materias dedicadas a la enseñanza y aprendizaje de las diferentes disciplinas (Matemáticas, entre otras) y suma un total de 100 créditos. Una de las novedades de los actuales estudios de GdM es la importante carga de créditos asignados al módulo de prácticas escolares que, incluyendo el Trabajo Fin de Grado, suma un total de 50 créditos.

Así, en los actuales estudios de GdM, en base a lo establecido en la Orden que especifica los requisitos para la titulación del Grado de Maestro de Primaria se establece que esta debe permitir la adquisición de “competencias matemáticas básicas (numéricas, de cálculo, geométricas, representaciones espaciales, estimación y medida, organización e interpretación de la información, etc.)”, en este mismo texto se incide también en que las asignaturas del módulo didáctico y disciplinar deben dotar a los futuros maestros y maestras de la capacidad de “plantear y resolver problemas vinculados con la vida cotidiana. Valorar la relación entre matemáticas y ciencias como uno de los pilares del pensamiento científico” (MEC, 2007, p. 53750). En base a estas pautas generales marcadas por la orden oficial, cada universidad ha configurado el diseño de los estudios de grado, así, la carga en créditos dedicada a la asignatura de Matemáticas o Didáctica de las Matemáticas oscila entre 15 y 22 créditos ECTS, lo que **representa entre alrededor de un 6% y un 9% del total de créditos de la titulación** y que, a tenor de lo que muestran diferentes estudios antes citados, parece una proporción insuficiente.

A partir de esta situación, existen diversas estrategias posibles para conseguir mejoras en el conocimiento matemático inicial del profesorado de Educación Primaria. En la Comunidad de Madrid, desde el año 2013 se ha incorporado una prueba de conocimiento matemático específica en el concurso oposición de Educación Primaria para proveer las plazas de las escuelas públicas. Esta estrate-

gia puede ser útil a corto plazo para resolver situaciones específicas, ya que no tienen influencia sobre el personal docente que se incorpora a los centros educativos privados. Nortes y Nortes (2018) utilizaron la prueba de ingreso al Cuerpo de Maestros/as de la Comunidad de Madrid con alumnado de 2º y 4º del GEP de la Universidad de Murcia, mostrando que solo un 17,8% superarían dicha prueba. Este dato no deja claro si un examen realizado una vez que se dispone del título y, por lo tanto, se ha completado la formación, mejora su conocimiento matemático.

3.2. Desarrollo profesional del docente de Matemáticas. La formación permanente y la formación continua

Al finalizar la etapa de formación inicial, el profesorado de Matemáticas tiene la opción de continuar formándose mientras ejerce su profesión. Actualmente la tendencia que marca el mercado, y aparentemente la demanda social, es lo que se ha denominado *lifelong learning*, que en español se ha traducido por *aprendizaje a lo largo de la vida*.

Sin embargo, este concepto es reciente y algunos autores apuntan (Bauman, 2009; Fernández Liria, García Fernández y Galindo Ferrández, 2017) a que obedece más a una exigencia del mercado, enmascarada en una promesa de excelencia profesional ilusoria. Anteriormente se hacía alusión a dos términos, que si bien se utilizan indistintamente como si fuesen la misma cosa, en realidad presentan diferencias sustanciales para este análisis (Navío Gámez, 2005): formación continua y formación permanente.

La formación permanente se refiere a la capacidad de una persona de continuar aprendiendo desde y en cualquier contexto. Alude al derecho de formarse integralmente, como persona que forma parte de una sociedad, pero también como sujeto individual con interés por conocimientos diversos. En este sentido se asemeja a la definición de *lifelong learning*, pero sin restringirlo exclusivamente al ámbito de lo profesional. No todos los aprendizajes del ser humano deben ir encaminados a una mejora profesional.

En cambio, la formación continua se refiere a aquella que se adquiere para mejorar el desempeño profesional, continuamente y de manera sostenida en el tiempo. Se engloba dentro de la formación permanente, considerándose uno más de todos los aspectos y modalidades en las que esta se basa. El punto en común con el concepto del *lifelong learning* estaría en la continuidad temporal, pero que finaliza al terminar la vida laboral. Sería un *professional lifelong learning*.

El desarrollo profesional del equipo docente de Matemáticas comprende tanto la formación inicial como la formación continua, pero también comprende aspectos como la promoción en la carrera docente o la experiencia.

La formación continua puede adquirirse de diferentes maneras, en función de la que el profesorado considere más conveniente. Se pueden agrupar en las siguientes categorías:

- *Ofertadas por las administraciones de las comunidades autónomas.* Son gratuitas para el profesorado y proporcionan ventajas en la promoción de la carrera docente: para obtener ciertos puestos (destino en concurso de traslados o cargos directivos) y para adquirir complementos retributivos.
- *Ofertadas por otras entidades.* Algunas de estas entidades son colaboradoras de las administraciones, y por tanto, las actividades de formación tienen el mismo carácter que las ofertadas por la administración. Sin embargo, en muchos casos la formación es impartida desde entidades privadas y, por lo tanto, no se garantiza la gratuidad ni su validez para la promoción de la carrera docente.
- *Comunidades docentes, redes profesionales y autoformación.* Se trata de acciones emprendidas entre iguales o por iniciativa propia. La participación en un congreso de educación para intercambiar experiencias, la pertenencia a una sociedad de profesorado de Matemáticas o la lectura de estudios sobre didáctica, son algunos ejemplos. El impacto en la promoción y la gratuidad es variable y depende de la legislación de cada zona.

3.2.1. Planes de formación de comunidades autónomas

Cada comunidad autónoma crea unos planes de formación dirigidos a profesorado en activo, en los cuales se marcan unas líneas prioritarias y se ofertan una serie de acciones formativas gratuitas. Por regla general, existen centros o institutos de formación, que pueden estar organizados en red o no, desde los cuales se coordinan las acciones. En numerosas ocasiones aparecen ligados al concepto de innovación. En el anexo se recogen las tendencias en la oferta específica de Matemáticas o en las que se encuentra de forma implícita (es el caso de la forma de trabajo STEAM: *Science, Technology, Engineering, Arts and Mathematics*) durante los primeros años del siglo XXI. En la siguiente tabla se incluyen los principales aspectos que se han recogido en el anexo:

- Plan de formación continua (periodicidad): PF.
- Existencia línea de formación continua en Matemáticas: PFM.

- Número de acciones formativas relacionadas con las matemáticas anteriores a 2018-2019: C-antes 2018.
- Número de acciones formativas relacionadas con las matemáticas 2018-2019: C-2018.
- Mención explícita en el plan a la formación STEM/STEAM: STEM/STEAM.

Tabla 4. Oferta de formación continua en matemáticas por comunidad autónoma

	PF	PFM	C-antes2018	C-2018	STEM/STEAM
Comunidad de Madrid	Anuales	No	175 Desde el 2009	19	Sí
País Vasco	Anuales	No	38 Desde el 2017	19	Sí
Castilla-La Mancha	No hay información	No	No hay información	4	Sí
Principado de Asturias	Anuales	No	No hay información	4 (4 ABN) ⁹	Sí
Castilla y León	Plurianual	No	Congresos desde 1990	164 (162 ABN)	No
Andalucía	Plurianuales	Sí	No hay información	242 (152 ABN)	No
Cantabria	Anuales	No	9 Desde el 2015	3	No
Galicia	Anuales	No	3 2015-2016	4 (1 ABN)	Sí
Cataluña	Anuales	Sí	No hay información	349 (incluye todas las modalidades)	Sí
Comunidad Valenciana	Anuales	Sí	No hay información	23	Sí
Extremadura	Plurianuales	No	No hay información	10 (5 ABN)	No
Región de Murcia	Trienales	Sí	No hay información	8	No
Canarias	Trienales	No	No hay información	5 (3 ABN)	No
Aragón	Cuatrienales	No	No hay información	1 ABN	No
Islas Baleares	Cuatrienales	Sí	15 Desde el 2015	9	No
Navarra	Anuales	No	9 Desde el 2015	2	No
La Rioja	No hay información	No	No hay información	5	No
Ceuta	Anuales	No	No hay información	2	No
Melilla	Anuales	No	2 Desde el 2015	0	Sí
INTEF ¹⁰	Anuales	No	1 Desde el 2014	0	Sí ¹¹

⁹ ABN son las siglas de Algoritmo Abierto Basado en Números. Consiste en trabajar las operaciones aritméticas mediante algoritmos que el alumnado puede escoger para resolver las operaciones, y que pueden ser diferentes a los tradicionalmente enseñados en las aulas.

¹⁰ Ámbito nacional.

¹¹ Bajo el epígrafe “pensamiento computacional”.

3.2.2. Otra oferta de formación continua: Sociedades de profesores de matemáticas e institutos

La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), a través de las sociedades, es impulsora de multitud de actividades para el docente de Matemáticas. Estas son, en muchos casos, entidades colaboradoras de los diferentes gobiernos autonómicos, lo que permite que los centros de profesorado recurran a ellas para el diseño e impartición de cursos de formación. En otras ocasiones, los centros certifican la formación que realiza la Federación. En algún caso, por ejemplo, en Canarias o Castilla-León, se podría decir que son impulsores de acciones formativas y que sin ellos la formación para el personal docente de Matemáticas sería inexistente.

Entre sus actuaciones hay que destacar la organización de las Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (JAEM), que llevan celebrándose desde el año 1981. La última ha tenido lugar en el 2019. También han colaborado en la organización del VIII CIBEM Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, que tuvo lugar en Madrid en el verano del 2017.

La RSME contribuye a la formación del profesorado organizando junto a la FESPM la Escuela de Educación Matemática Miguel de Guzmán. Se lleva realizando desde el 2005 y actualmente tiene carácter bienal. En Tenerife, en el 2018, tuvo lugar la X edición.

Los Institutos de Geogebra organizan cursos, seminarios y jornadas sobre el uso de este programa en las clases de Matemáticas. Comenzaron su andadura en el 2013, aunque desde el 2009 se han celebrado eventos para el profesorado de Matemáticas en niveles no universitarios organizados por el Centro Internacional de Encuentros Matemáticos (CIEM), la FESPM y el Instituto Geogebra.

3.2.3. Perspectiva internacional sobre la formación continua del profesorado de Matemáticas

En el *Informe Eurydice: La profesión docente en Europa. Prácticas, percepciones y políticas* (2015), se recogen las necesidades de formación del profesorado europeo. Dos de los índices a evaluar se centran en los contenidos y en las competencias pedagógicas de la propia materia. En general, en Europa no se manifiesta una necesidad alta de formación en estos ámbitos, ya que las diferencias entre las áreas no son significativas. No obstante, la oferta formativa en España es mucho más amplia en estas cuestiones que en otras manifestadas por el profesorado,

como las relacionadas con las TIC y las nuevas tecnologías, o las que involucran la gestión de aula para resolución de conflictos, atención al alumnado con necesidades educativas y la diversidad cultural. Es decir, el profesorado tiene la percepción de que tiene poca oferta para sus necesidades reales.

El informe *Talis* (OCDE, 2014) ya proporciona datos en este sentido, avalado por el estudio homónimo español (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014), que evalúa las creencias del profesorado de España de Matemáticas en torno a la percepción de su labor docente en relación con el de sus homólogos europeos. Dicho informe sitúa la percepción de la propia práctica del profesorado de Matemáticas español en el mismo nivel que el personal docente europeo. No obstante, se encuentra por debajo en cuestiones como el trabajo en proyectos que duren más de una semana o el trabajo en equipo con otros profesores y profesoras. También es ligeramente inferior en gestión de la disciplina de aula y participación del alumnado en la construcción de soluciones autónomas.

Tanto las necesidades de formación a nivel europeo como las creencias del profesorado de matemáticas, sugieren que la oferta formativa debe estar orientada a metodologías abiertas, la gestión de aula y al intercambio de experiencias profesionales. Y, sobre todo, debe contemplar la inclusión de las TIC y nuevas tecnologías, a pesar de que el profesorado español de Matemáticas expresa una percepción de competencia alta y a que esta necesidad solo es manifestada de forma notable en las franjas de edades mayores de 40 años.

Por otro lado, y en contraposición a los informes anteriores, un reciente estudio de la European Schoolnet (2018) define a las Matemáticas como “la asignatura más importante en educación”. Son la clave para que los estudiantes opten por estudios STEAM, ya que la elección del alumnado dependerá de su éxito en esta materia. Las políticas educativas deben ser conscientes de que a través de las Matemáticas están promoviendo la entrada a las carreras STEM, y por ello recomiendan que el profesorado se forme en la disminución de la tasa de fracaso en esta materia, así como en metodologías que integren las Matemáticas con otras asignaturas bajo un enfoque de trabajo por proyectos, mediante la indagación o la investigación.

3.2.4. Conclusiones: Desarrollo profesional del docente de Matemáticas

Las opciones para la formación continua del profesorado de Matemáticas son escasas y dispersas. No existe un itinerario de formación en prácticamen-

te ninguna comunidad autónoma que pueda ser interesante para el desarrollo profesional del docente de esta disciplina. La oferta formativa generalizada hace hincapié en metodologías vacías, sin concretar sobre qué se quiere trabajar y sin tener en cuenta los contenidos. En el caso de las matemáticas, la investigación en didáctica ha demostrado que la forma de enseñar esta materia debe relacionarse con el tipo de conceptos involucrados. Sin embargo, del análisis de los datos disponibles sobre la oferta de formación continua para el profesorado, se observa una tendencia al abandono de las acciones con contenido matemático a lo largo de los últimos años.

No existe un itinerario de formación en prácticamente ninguna comunidad autónoma que pueda ser interesante para el desarrollo profesional del docente de esta disciplina

Esta tendencia contrasta con la demanda de formación en la enseñanza de las Matemáticas expresada por el profesorado, sobre todo en los niveles de infantil y primaria. La prueba de esta necesidad es la proliferación de entidades privadas con ánimo de lucro que venden supuestos métodos milagro y medran a costa de estas carencias y de la indefensión del profesorado, sin otra opción que contemplar. Si las instituciones públicas de los gobiernos autónomos no son capaces de ofrecer una oferta sólida, coherente, basada en la investigación en didácticas específicas que marque un itinerario de formación continua para el docente que ha de enseñar Matemáticas, no se garantizará un correcto desarrollo de las competencias matemáticas del alumnado.

Las sociedades de profesorado de Matemáticas y la RSME juegan un papel fundamental en la formación continua del personal docente. También las universidades y otras asociaciones e institutos interesados en la formación matemática deberían involucrarse y trabajar conjuntamente para conseguir que las Matemáticas sean consideradas una materia transversal, necesaria para el desarrollo integral de la persona.

Otra de las tendencias observadas es que las matemáticas únicamente aparecen ligadas a la formación STEAM (NCTM, 2018). El origen de esta perspectiva de la enseñanza está fuertemente vinculada a la productividad económica y de mercados (Teitelbaum, 2014). Es una idea positiva en tanto en cuanto potencia que el alumnado ejercite la creatividad, no pierda la curiosidad ni la capacidad de hacerse preguntas y aprenda a resolver problemas complejos. Sin duda, una formación de este tipo propicia que las futuras opciones de empleo sean mayores

y mejores. No obstante, en el caso de las matemáticas, se corre el peligro de que sean relegadas a un papel meramente instrumental. En ese sentido no podemos obviarlas cuando se habla de pensamiento computacional y la robótica, porque estas tendencias concretas no pueden sustituir a toda la matemática en su conjunto ni a las competencias involucradas en su comprensión.

Respecto a la perspectiva internacional, la tendencia es priorizar la formación en metodologías generales y la inclusión de las TIC, en detrimento de la formación en cuestiones pedagógicas relacionadas con el contenido o con el currículo. Esto contrasta con la promoción de la forma de enseñanza STEAM, que intenta potenciar las vocaciones científicas para satisfacer un mercado laboral previsto en un escenario futuro. El profesorado de Matemáticas con un conocimiento escaso o deficiente sobre la didáctica de las matemáticas, poco podrá hacer para conseguir elevar la motivación hacia el estudio de carreras STEAM.

En este apartado se ha intentado proporcionar una visión general del estado de la cuestión en torno a la formación continua del docente de Matemáticas. No obstante, es necesario contar con estudios exhaustivos para corroborar estas tendencias y en la medida de lo posible evaluar sus causas. Asimismo, también es recomendable ampliar la investigación a otras entidades, públicas y privadas, que oferten formación continua. De esta manera, el panorama será más completo y permitirá fundamentar y argumentar posibles soluciones.

4. CONCLUSIONES

Este capítulo ofrece una visión de conjunto de la enseñanza de las Matemáticas en la educación preuniversitaria española. Se han descrito las características de la educación matemática señalando propuestas de mejora y se han identificado desafíos que debemos afrontar a nivel nacional durante los próximos años. Estas ideas se resumen a continuación en torno a tres ejes fundamentales: las políticas educativas, las prácticas de enseñanza en el aula y la formación del profesorado de Matemáticas.

Respecto a las **políticas educativas**, se han constatado insuficiencias en cuanto a la atención a la diversidad en la enseñanza de las Matemáticas escolares. A día de hoy aún existe falta de equidad en las oportunidades de una formación matemática permanente para el alumnado inmigrante y con necesidades educativas de atención específicas, incluyendo estudiantes con talento matemático, con mucho margen aún de mejora en este sentido según apuntan los datos. En

el análisis de género aparecen cifras que sugieren que existe una brecha de género en la educación matemática desde edades tempranas. Entender sus causas es imprescindible para diseñar políticas dirigidas a solucionar este problema, por lo que parece de la mayor importancia investigar cómo y cuándo se origina esta brecha de género¹².

En lo que respecta a la **normativa y al enfoque de la educación matemática**, se ha destacado la debilidad de apostar por una alfabetización puramente funcional del alumnado, dejando de lado la oportunidad de proporcionar a los ciudadanos y ciudadanas del mañana una educación matemática crítica, intercultural y sostenible. Las sucesivas reformas educativas apenas han alterado el enfoque curricular básico, que sigue reincidiendo en una visión de las matemáticas marcadamente disciplinar y atomista, cargada de contenidos y donde el diseño cíclico (espiral-helicoidal) no se ha consolidado como efectivo. Este hecho parece haber derivado en un enfoque de las matemáticas poco comprensivo, sobre todo en edades tempranas, lo que conlleva a una visión de la asignatura más bien procedimental, es decir, centrada en procesos que se reproducen para resolver tareas más o menos rutinarias. Por el contrario, en el contexto socioeducativo actual en el que se tiende a la globalidad, el desarrollo de las competencias STEAM deben ser parte de la formación del alumnado en las enseñanzas obligatorias y bachillerato. Por tanto, las políticas educativas deben comprometerse a apostar por modelos formativos que apoyen una formación matemática que fomente el razonamiento y la comprensión, al tiempo que admita la interdisciplinaridad, de forma que el conocimiento matemático surja como respuesta a problemas que se plantean asociados a las ciencias, la tecnología y la ingeniería. En este sentido, conviene impulsar el desarrollo de la competencia matemática desde enfoques en los que la aplicabilidad de los contenidos matemáticos en el ámbito STEAM quede patente durante el proceso de aprendizaje de las Matemáticas del alumnado preuniversitario.

Respecto a las **prácticas docentes**, estas ideas repercuten principalmente en la metodología y en la evaluación. Se propone apostar por metodologías basadas en lo fenomenológico como son las tareas auténticas, el aprendizaje basado en proyectos o la resolución de problemas. Además, la investigación apoya el uso de materiales manipulativos, no solo a edades tempranas. Por ello es necesario que,

¹² Véase el capítulo específico sobre género en este Libro Blanco.

incluso en tiempos digitales, el alumnado no deje de aprender Matemáticas en entornos analógicos, para que puedan aprovechar con éxito los recursos cognitivos de los que disponen. Esto no debe ser óbice, no obstante, para considerar la tecnología como un recurso útil para la comprensión de las matemáticas. De hecho, el escenario actual respecto a la relación de la ciudadanía con la tecnología demanda que el estudiantado tome también el papel de creador, por lo que la programación y el pensamiento computacional aparecen como destrezas que deben asociarse con la competencia matemática, ya que todas ellas son claves para satisfacer las necesidades de una sociedad digital. Asimismo, se propone que la incorporación de estas metodologías sean una oportunidad no solo para la innovación a diferentes niveles, sino para atender a la diversidad del alumnado y mejorar la equidad del sistema educativo.

En este contexto, la **evaluación en el aula de Matemáticas** debe concebirse desde una perspectiva formativa. Las expectativas de aprendizaje deben ser objeto de observación por parte del profesorado, de manera que el resultado de la evaluación proporcione información sobre qué capacidad de aprendizaje tiene el alumnado y evitar así la discriminación en función de su rendimiento. No debe olvidarse, a este respecto, que en la educación preuniversitaria la evaluación debería ser una práctica orientada a la mejora del aprendizaje matemático, que está condicionada por el currículo, y debe atender tanto a los resultados de estudio como a las prácticas de enseñanza. Por otro lado, la evaluación de estas últimas debe generalizarse en el aula, ya que enriquece la capacidad de toma de decisiones del profesorado, contribuyendo a su desarrollo profesional. Una evaluación efectiva de la práctica profesional se ve potenciada por la coordinación entre docentes y el uso de herramientas desarrolladas por la investigación.

Respecto a la **formación del profesorado de Matemáticas**, se ha constatado que el conocimiento del docente aparece como la causa más clara entre aquellas no relacionadas con el alumnado, mucho más que el contexto social o el tiempo dedicado a la enseñanza de las Matemáticas durante su formación inicial. Esto otorga a la formación inicial y continua del profesorado un papel fundamental en el sistema educativo, lo que constata la necesidad de establecer estrategias para conseguir mejoras en el conocimiento matemático inicial de los maestros y maestras de primaria. No obstante, hay dudas sobre reintroducir la especialización entre el personal docente de primaria y se plantea una opción intermedia: la figura del docente con formación reforzada en matemáticas, no con el objetivo de que se encargue de toda la enseñanza de Matemáticas, sino con la idea de que

asuma un rol de coordinación entre los equipos docentes, para ayudarles en el desempeño de sus tareas.

Las opciones para la formación continua del profesorado de Matemáticas que se han encontrado son escasas y dispersas. No existe un itinerario de formación en prácticamente ninguna comunidad autónoma que pueda ser interesante para su desarrollo profesional. La oferta formativa generalizada hace hincapié en metodologías y no tiene demasiado en cuenta los contenidos, ni la evaluación. Se constata también la amenaza de una tendencia a priorizar la formación en metodologías generales y la inclusión de las TIC, en detrimento de la formación en cuestiones pedagógicas relacionadas con el contenido o con el currículo.

En síntesis, en el capítulo se ha argumentado sobre las debilidades de la educación matemática preuniversitaria española. A su vez, se han presentado las fortalezas de dicha educación para continuar innovando e investigando en dicho campo.

5. REFERENCIAS

- Aguilar, A., Carmona, E., Carrillo, J., Contreras, L., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E., Flores, P., Huitrudo, J., Montes, M., Muñoz-Catalán, M., Rojas, N., Sosa, I., Vasco, D. y Zakaryan, D. (2013), “El conocimiento especializado del profesor de matemáticas: MTSK” en *Actas VII CIBEM*, Montevideo, Uruguay, pp. 5063-5069.
- Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2014). Devising a plan to solve Fermi problems involving large numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 86(1), 79-96.
- AMCA: Asociación Matemática Cálculo ABN (2019) Por unas matemáticas sencillas, naturales y divertidas. Disponible en: <https://calculoabn.com/> (Accedido: 13 05 2019).
- AMS (2018). American Mathematical Society: Math in the Media. French math education: Villani to the rescue. [En línea] Available at: <http://www.ams.org/publicoutreach/math-in-the-media/mm-03-2018-media>.
- Aragón (2013) “DECRETO 105/2013, de 11 de junio, del Gobierno de Aragón, por el que se regula el sistema aragonés de formación permanente del profesorado, su régimen jurídico y la estructura de sus red” *Boletín Oficial de Aragón*, 25 de junio de 2013 (123) pp. 15671-15683.

- Aragón (2016) “ORDEN ECD/309/2016, de 18 de marzo, por la que se aprueba el Plan Marco Aragonés de Formación del Profesorado” *Boletín Oficial de Aragón*, 18 de abril de 2016 (73) pp. 8678-8701.
- Arce, M., Marbán, J.M. y Palop, B. (2017). Aproximación al conocimiento común del contenido matemático en estudiantes para maestro de primaria de nuevo ingreso desde la prueba de evaluación final de Educación Primaria. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* pp. 119-128. Zaragoza: SEIEM.
- Ärlebäck, J. B. (2009). Exploring the solving process of group solving realistic Fermi problems from the perspective of the Anthropological theory of didactics. In M. Pytlak, T. Rowland, & W Swoboda (eds.), *Proceedings of the CERME 7*, (pp. 1010-1020). CERME: Rzeszów (Poland).
- Arnau, D., Arevalillo-Herráez, M., y González-Calero, J. A. (2014). Emulating human supervision in an intelligent tutoring system for arithmetical problem solving. *IEEE Transactions on Learning Technologies*, (1), 1-1.
- Barquero, B. (2015). Enseñando Modelización a Nivel Universitario: la relatividad institucional de los recorridos de estudio e investigación. *Boletim de Educação Matemática*, 29(52), 593-612.
- Barquero, B., Bosh, M. y Romo, A. (2015). A study and research path on mathematical modelling for teacher education. In K. Krainer & N. Vondrová (eds.), *Proceedings of the CERME 9* (pp. 809-8015). CERME: Prague (Czech Republic).
- Batanero, C. & Chernoff, E., (2018). *Teaching and Learning Stochastics: Advances in Probability Education Research*. Berlin: Springer.
- Bauman, Z. (2009). *Vida líquida*. Barcelona: Paidós.
- Beltrán Llavador, J.(2000). Escenarios para la formación del profesorado: los centros de profesores como fábricas de significado. *Conceptos de Educación*, 4. Consultado en http://www.quadernsdigitals.net/index.php?accionMenu=hemeroteca.VisualizaArticuloIU.visualiza&articulo_id=2216.
- Beltrán-Pellicer, P. (2015), *Series y largometrajes como recurso didáctico en matemáticas en Educación Secundaria*, Tesis doctoral, UNED.

- Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects—State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational studies in mathematics*, 22(1), 37-68.
- Borromeo-Ferri, R. (2018). Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education. New York: Springer.
- Borromeo-Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, 38(2), 86-95.
- Bua, B. (2015). Modelización y matematización en el contexto de tres fenómenos físicos. Tesis doctoral, Universidad de Santiago de Compostela.
- Cabassut, R. y Ferrando, I. (2017). Difficulties in Teaching Modelling: A French-Spanish Exploration. In *Mathematical Modelling and Applications* pp. 223-232. Springer, Cham.
- Canarias (2012) “ORDEN de 23 de julio de 2012, por la que se modifica la estructura de la Red de Centros del Profesorado de Canarias” *Boletín Oficial de Canarias*, 2 de octubre de 2012 (193) pp. 18870-18872.
- Carbonneau, K. J., Marley, S. C. y Selig, J. P. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, 105(2), 380.
- Castilla-La Mancha (2005) “Decreto 78/2005, de 05-07-2005, por el que se regula la formación permanente del profesorado en la Comunidad Autónoma de Castilla-La Mancha” *Diario Oficial de Castilla-La Mancha*, 8 de julio de 2005 (136) pp. 13458-13462.
- Castilla-La Mancha (2012) “Decreto 59/2012, de 23 de febrero, por el que se crea el Centro Regional de Formación del Profesorado de Castilla-La Mancha y se regula la estructura del modelo de formación permanente del profesorado” *Diario Oficial de Castilla-La Mancha*, 28 de febrero de 2012 (43) pp. 7660-7664.
- Castro, Á., Mengual, E., Prat, M., Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2014). Conocimiento matemático fundamental para el Grado de Educación Primaria: inicio de una línea de investigación. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* pp. 227-236. Salamanca: SEIEM.

- Cheng, K. (2017). Advancing 21st Century Competencies in East Asian Education Systems. Asia Society, Center for Global Education. [En línea] Available at: <https://asiasociety.org/files/21st-century-competencies-east-asian-education-systems.pdf>.
- Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE/Horsori.
- Comisión Europea, (2018). *Comunicación de la Comisión al Parlamento Europeo, al Consejo, al Comité Económico y Social Europeo y al Comité de las Regiones. Construyendo una Europa más fuerte: el papel de las políticas de juventud, educación y cultura*, Bruselas: s.n.
- Comisión Europea/EACEA/Eurydice. (2015) *La profesión docente en Europa: Prácticas, percepciones y políticas*. Informe de Eurydice. Luxemburgo: Oficina de Publicaciones de la Unión Europea.
- Comunidad de Madrid (2017) “DECRETO 120/2017, de 3 de octubre, del Consejo de Gobierno, por el que se regula la formación permanente, la dedicación y la innovación del personal docente no universitario de la Comunidad de Madrid”. *Boletín oficial de la Comunidad de Madrid*, 10 de octubre de 2017 (241), pp. 10-18.
- Comunidad de Madrid (2018) “ORDEN 2453/2018, de 25 de julio, de la Consejería de Educación e Investigación, que regula la formación permanente, la dedicación y la innovación del personal docente no universitario de la Comunidad de Madrid”. *Boletín oficial de la Comunidad de Madrid*, 3 de agosto de 2018 (184), pp. 46-60.
- Comunidad Valenciana (1985) “Decreto 12/1985, de 14 de febrero, del Consell de la Generalitat Valenciana, por el que se regula la creación y funcionamiento de los Centros de Profesores de la Comunidad Valenciana”. *Diari Oficial de la Generalitat Valenciana*, 7 de agosto de 1985 (234).
- Comunidad Valenciana (1997) “DECRETO 231/1991, de 2 de septiembre, del Gobierno Valenciano, por el que se regula la creación, estructura y funcionamiento de los Centros de Formación, Innovación y Recursos Educativos de la Comunidad Valenciana”. *Diari Oficial de la Generalitat Valenciana*, 8 de septiembre de 1997 (3073) pp. 14194-14198.
- Comunidad Valenciana (2005) “RESOLUCIÓN de 24 de mayo de 2005, del director general de Personal Docente de la Conselleria de Cultura, Educa-

- ción y Deporte, por la que se convoca un proceso de selección para la provisión de puestos de trabajo de asesorías de formación de los Centros de Formación, Innovación y Recursos Educativos de la Comunidad Valenciana”. *Diari Oficial de la Comunitat Valenciana*, 30 de mayo de 2005 (5016) pp. 18504-18515.
- Comunidad Valenciana (2012) “ORDEN 64/2012, de 26 de octubre, de la Conselleria de Educación, Formación y Empleo, por la que se desarrolla el Decreto 231/1997, de 2 de septiembre, por el que se regula la creación, estructura y funcionamiento de los Centros de Formación, Innovación y Recursos Educativos de la Comunitat Valenciana”. *Diari Oficial de la Comunitat Valenciana*, 31 de octubre de 2012 (6893) pp. 30581-30586.
- Comunidad Valenciana (2016) “RESOLUCIÓN de 5 de agosto de 2016, de la Conselleria de Educación, Investigación, Cultura y Deporte, por la que se crean los centros de formación, innovación y recursos educativos (CEFIRE) generales de Elche, Gandía y Sagunto y los CEFIRE específicos de Educación Inclusiva, Educación Infantil, Plurilingüismo, Ámbito Científico Tecnológico y Matemático, Ámbito Humanístico y Social y ámbito Artístico-Expresivo.” *Diari Oficial de la Comunitat Valenciana*, 16 de agosto de 2016 (7851) pp. 23398-23400.
- Comunidad Valenciana (2018) “RESOLUCIÓN de 20 de julio de 2018, de la Secretaría Autonómica de Educación e Investigación, por la que se establece el Plan anual de formación permanente del profesorado para el curso 2018-2019”. *Diari Oficial de la Generalitat Valenciana*, 30 de agosto de 2018 (8372) pp. 35326-35333.
- Confrey, J., Maloney, A. P. & Corley, A. (2014). Learning trajectories: a framework for connecting standards with curriculum. *ZDM Mathematics Education*, Issue 14, pp. 719. <https://doi.org/10.1007/s11858-014-0598-7>.
- Consejería de Educación e Investigación de la Comunidad de Madrid (2019) *Red de Formación del Profesorado*. Disponible en: <http://gestiondgmmejora.educa.madrid.org/> (Accedido: 13 05 2019).
- Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía (2002) *II Plan andaluz de formación permanente del profesorado*. Disponible en: http://www.baiona.org/c/document_library/get_file?uuid=8a0bb623-3102-4763-8cb1-c24a32701b93&groupId=10904 (Accedido: 13 05 2019).

- Consejería de Educación y Cultura del Gobierno del Principado de Asturias (2019) *Educastur: Proyectos de actividades de formación común 2018-2019*. Disponible en: <https://www.educastur.es/-/proyectos-de-actividades-de-formacion-comun-2018-2019> (Accedido: 13 05 2019).
- Consejería de Educación y Cultura del Gobierno del Principado de Asturias: CPR Avilés Occidente (2019) *C.P. el Pascón (Tineo) - Iniciación a la metodología ABN en infantil y primaria*. Disponible en: http://proyectoscprgijon.es/gestoraviles/admin/lis_diptico.php?id=5526 (Accedido: 13 05 2019).
- Consejería de Educación y Cultura del Gobierno del Principado de Asturias: CPR Avilés Oriente (2018a) *Curso de iniciación al método ABN*. Disponible en: <http://www.cprgijon.es/2018/11/curso-iniciacion-al-metodo-abn.html> (Accedido: 13 05 2019).
- Consejería de Educación y Cultura del Gobierno del Principado de Asturias: CPR Avilés Oriente (2018b) *Método ABN. Profundización*. Disponible en: <http://www.cprgijon.es/2019/02/curso-metodo-abn-profundizacion.html> (Accedido: 13 05 2019).
- Consejería de Educación, Cultura, Deportes y Juventud de Castilla-La Mancha (2019) *Portal de Educación: Centro Regional de Formación del Profesorado*. Disponible en: <http://www.educa.jccm.es/profesorado/es/crfp/calendario-acciones-formativas> (Accedido: 13 05 2019).
- De Lange, J. (2003). Mathematics for literacy. In B.L. Madison, & L.A. Steen (Eds.), *Quantitative literacy. Why numeracy matters for schools and colleges* (pp. 75–89). Princeton, NJ: The National Council on Education and the Disciplines.
- Departamento de Educación del País Vasco (2019a) *Innovación Educativa: Prest_Gara*. Disponible en: <http://www.euskadi.eus/personal-docente-formacion-prest-gara/web01-a3htreba/es/> (Accedido: 13 05 2019).
- Departamento de Educación del País Vasco (2019b) *Formación del profesorado > STEAM (Science, Technology, Engineering, Art & Mathematics)*. Disponible en: <http://www.euskadi.eus/personal-docente-formacion-prest-gara/web01-a3htreba/es/> (Accedido: 13 05 2019).
- Díez, A., Cañadas, M.C., Picado, M., Rico, L. y Castro, E. (2016). Magnitudes y su medida en el currículo de primaria en España (1945-2013). *Profesorado*.

- Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, 20(1), enero-abril, 341-363.
- European Schoolnet (2018). Science, Technology, Engineering and Mathematics Education Policies in Europe. Scientix Observatory report. October 2018, European Schoolnet, Brussels.
- Extremadura (2007) “DECRETO 69/2007, de 10 de abril, por el que se regula el sistema de formación permanente del profesorado en la Comunidad Autónoma de Extremadura”. *Diario Oficial de Extremadura*, 17 de abril de 2007 (44) pp. 7023-7033.
- Extremadura (2016) “Orden de 25 de noviembre de 2016, por la que se aprueba el Plan Marco de Formación Permanente del Profesorado de la Comunidad Autónoma de Extremadura”. *Diario Oficial de Extremadura*, 30 de noviembre de 2016 (230) pp. 31187-31197.
- Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) (n.d) Página web. Disponible en: <http://www.fespm.es/> (Accedido 13 05 2019).
- Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) (2018) Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (JAEM): Un atlántico que suma. Disponible en: <https://www.19jaem.org/> (Accedido 13 05 2019).
- Fernández, C., García, O. y Galindo, E. (2017). *Escuela o barbarie*. Madrid: Ediciones Akal.
- Ferrando, I., Albarracín, L., Gallart, C., García-Raffi, L. M. y Gorgorió, N. (2017). Análisis de los modelos matemáticos producidos durante la resolución de problemas de Fermi. *Boletim de Educação Matemática*, 31(57), 220-242.
- Ferrando, I., Segura, C. y Pla-Castells, M., (2017). Nuevas metodologías para la enseñanza de las Matemáticas: análisis crítico. Jornades CTEM de la comunitat valenciana.
- Flores, P. (2007), “Profesores de matemáticas reflexivos: formación y cuestiones de investigación”, *PNA*, 1(4), pp. 139-359.
- Freudenthal, H. (1991) *Revisiting mathematics education*. Kluwer, Dordrecht. China lectures.

- Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational studies in mathematics*, 1(1-2), 3-8.
- Freudenthal, H. (1985), “Wat wordt er niet getoetst, en kan dat wel?”, *Euclides*, 60(8 / 9), pp. 303-305.
- Fryer, R. G., (2018). The “Pupil” Factory: Specialization and the Production of Human Capital in Schools. *American Economic Review*, 108(3), 616-56.
- Gallart, C. (2016). La modelización como herramienta de evaluación competencial. Tesis doctoral, Universidad de Valencia.
- García, F. J., Gascón, J., Ruiz, L., y Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM*, 38(3), 226-246.
- Generalitat de Catalunya (2019) *XTEC-Xarxa Telemàtica Educativa de Catalunya*. Disponible en <http://xtec.gencat.cat/ca/formacio/info-general/cercador-activitats/> (Accedido: 13 05 2019).
- Generalitat de Catalunya (n.d.) *Ateneu: Com ajudar a desenvolupar la competència matemàtica*. Disponible en <http://ateneu.xtec.cat/wikiform/wikiexport/fic/cma/cma02/guia> (Accedido: 13 05 2019).
- Generalitat Valenciana (2018) CEFIRE Disponible en: <http://www.ceice.gva.es/es/web/formacion-profesorado/cefire> (Accedido: 13 05 2019).
- Generalitat Valenciana (2019) CEFIRE Científic, Tecnològic i Matemàtic. Disponible en: <http://mestreacasa.gva.es/web/cefireambitctm/home> (Accedido: 13 05 2019).
- Gobierno de Aragón (n.d.) Centro de Profesorado Ana Abarca de Bolea. Disponible en: <http://cifeaab.catedu.es/documentos-para-descargar/> (Accedido 13 05 2019).
- Gobierno de Canarias (2015) Plan canario de formación del profesorado. Trienio 2015-2018. Disponible en: <http://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/campus/doc/doc/programas/2015-18/secciones/seccion01.html> (Accedido 13 05 2019).
- Gobierno de Canarias (2018) “Resolución de la Dirección General de Ordenación, Innovación y Promoción Educativa, por la que se autorizan los seminarios de trabajo durante el curso académico 2018-2019” *Resolución interna Consejería de Educación, 15 de octubre de 2018*.

- Gobierno de Canarias (2018) “Resolución de la Dirección General de Ordenación, Innovación y Promoción Educativa, por la que se autorizan los grupos de trabajo durante el curso académico 2018-2019” *Resolución interna Consejería de Educación, 15 de octubre de 2018*.
- Gobierno de Cantabria (2014) *Plan regional de formación permanente del profesorado 2014-2015*. Disponible en http://www.cepdecantabria.es/images/Plan_Regional_de_Formaci%C3%B3n_Permanente_del_Profesorado_2014-2015.pdf (Accedido: 13 05 2019).
- Gobierno de Cantabria (2015) *Plan regional de formación permanente del profesorado 2015/2019*. Disponible en: https://www.educantabria.es/docs/anuncios_y_convocatorias/nov_dic_2015/plan_profesorado_2.pdf (Accedido: 13 05 2019).
- Gobierno de Cantabria (2017) *Plan anual de formación permanente del profesorado 2017-2018*. Disponible en https://www.educantabria.es/docs/profesorado/formacion_permanente/plan_formacion/Plan_Anual_de_Formacion_Permanente_del_Profesorado_def_2017-2018.pdf (Accedido: 13 05 2019).
- Gobierno de Cantabria (2018) *Plan anual de formación permanente del profesorado 2018-2019*. Disponible en https://www.educantabria.es/docs/formacion/Plan_Anual_Formacion_Permanente_Profesorado_18-19.pdf (Accedido: 13 05 2019).
- Gobierno de España. Ministerio de Educación y Formación Profesional (2019) Formación del profesorado Melilla. Disponible en: <http://www.educacion-yfp.gob.es/educacion-mecd/ba/ceuta-melilla/melilla/formacion-profesorado.html> (Accedido 13 05 2019).
- Gobierno de España. Ministerio de Educación y Formación Profesional (2019) Formación del profesorado Ceuta. Disponible en: <http://www.educacion-yfp.gob.es/educacion-mecd/eu/ba/ceuta-melilla/ceuta/formacion-profesorado/formacion.html> (Accedido 13 05 2019).
- Gobierno de España. Ministerio de Educación y Formación Profesional (n.d.) INTEF: Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado. Disponible en: <https://intef.es/> (Accedido 13 05 2019).
- Gobierno de España. Ministerio de Educación y Formación Profesional (2018) *Programación, robótica y pensamiento computacional en el aula. Situación en*

España y propuesta normativa. INTEF: Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado.

Gobierno de España. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014) AprendeINTEF. Cursos tutorizados en línea. REA. Recursos Educativos Abiertos para la enseñanza de las Matemáticas. Disponible en: <http://formacion.intef.es/course/view.php?id=488> (Accedido 13 05 2019).

Gobierno de España. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014) Blog INTEF REA. Recursos Educativos Abiertos. *Recursos Educativos Abiertos para la enseñanza: búsqueda, creación y puesta en común de recursos a través de cinco cursos en línea para la formación de profesores*. Disponible en: <https://intef.es/Blog/recursos-educativos-abiertos-para-la-ensenanza-busqueda-creacion-y-puesta-en-comun-de-recursos-a-traves-de-cinco-cursos-en-linea-para-la-formacion-de-profesores/> (Accedido 13 05 2019).

Gobierno de España. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2013) Blog INTEF REA. Recursos Educativos Abiertos para la enseñanza de las Matemáticas. Disponible en: <http://reamatematicasintef.blogspot.com/> (Accedido 13 05 2019).

Gobierno de España. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2015) AprendeINTEF. Cursos tutorizados en línea. REA. Recursos Educativos Abiertos para la enseñanza de las Matemáticas, las Ciencias y la Tecnología. Disponible en: <http://formacion.intef.es/course/view.php?id=251> (Accedido 13 05 2019).

Gobierno de la Rioja (n.d.) La Rioja.org, el Gobierno de la Rioja en Internet. Disponible en: <https://www.larioja.org/edu-innovacion-form/es> (Accedido 13 05 2019).

Gobierno de Navarra (n.d.) Formación del Profesorado. Disponible en: <http://formacionprofesorado.educacion.navarra.es/web/> (Accedido 13 05 2019).

Godino, J. (2011), Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM-IACME)*, Recife, Brasil, pp. 1-20.

González-Calero, J. A., Arnau, D., Puig, L. y Arevalillo-Herráez, M. (2015). Intensive scaffolding in an intelligent tutoring system for the learning of algebraic word problem solving. *British Journal of Educational Technology*, 46(6), 1189-1200.

- Gorgorió, N. y Albarracín, L. (2019). El conocimiento matemático previo a la formación inicial de los maestros: necesidad y concreción de una prueba. En Libro RED-8. Publicaciones de la Universidad de Salamanca.
- Gorgorió, N., Albarracín, L. y Laine, A. (2019). Impact of access requirements on the mathematical knowledge of students admitted to Primary Teaching programs: a micro-comparative study. *Proceedings CERME 11*.
- Govern de les Illes Balears (2004) *Pla quadriennal de Formació Permanent del Professorat*. Disponible en: http://weib.caib.es/Formacio/planificacio/pla_formacio0408.pdf (Accedido 13 05 2019).
- Govern de les Illes Balears (2012) *Pla de formació permanent del professorat de les Illes Balears*. Disponible en: <http://weib.caib.es/Formacio/planificacio/pla-de-formacio-permanent-del-professorat-2012-16.pdf> (Accedido 13 05 2019).
- Govern de les Illes Balears (2016) *Pla de formació del professorat 2016-2020*. Disponible en http://weib.caib.es/Formacio/planificacio/pla_formacio_2016_2020.pdf (Accedido 13 05 2019).
- Govern de les Illes Balears (2019) Weib: el web educatiu de les Illes Balears. Disponible en: <http://weib.caib.es/> (Accedido 13 05 2019).
- Gravemeijer, K. (1982), “Het gebruik van contexten”, *Willem Bartjens*, 1(4), pp. 192-197.
- Grupo Cero (1984). De 12 a 16. *Un proyecto de currículum de matemáticas*. Valencia: Nau llibres.
- Gueudet, G., (2008). Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, 6(73), pp. 237-254.
- Iglesias, D., Perezagua, F., Ávila, O., Pardillo, V., Tercero, R., De la Torre, D. y Catalán, V. “Escenarios de aprendizaje del siglo XXI”, en Gobierno de Aragón (eds.) *I Encuentro Interautonómico de Asesorías de Formación Educativa*. Zaragoza, 16-17 de enero de 2019. Disponible en: <https://www.eiafe.es/resumen-del-eiafe> (Accedido: 13 05 2019).
- Illes Balears (2016) “Resolució del conseller d'Educació i Universitat de dia 16 de març de 2016 per la qual s'aprova el Pla quadriennal de formació perma-

- ment del professorat 2016-2020” *Butlletí Oficial de les Illes Balears*, 31 de març de 2016 (45) pp. 8900-8918.
- INEE, (2012). TEDS-M Informe Español Estudio Internacional sobre la formación en matemáticas de los maestros. [En línea] Available at: <http://www.educacionyfp.gob.es/inee/evaluaciones-internacionales/otros-estudios/teds-m-informe-espanol.html>.
- Institutos Geogebra (n.d.) Disponible en: <http://institutosgeogebra.es/> (Accedido 13 05 2019).
- ISTE, (2016). *International Society for Technology in Education Standards for Students*. Eugene, OR.
- Jarauta, B., Colén Riau, M., Barredo, B. y Bozu, Z. (2014). La formación permanente del profesorado en Cataluña. Análisis de los referentes legales. *Bordón. Revista de Pedagogía*, 66(4).
- Jarauta, B., Colén, M., Barredo, B. y Bozu, Z. (2014). La formación permanente del profesorado en Cataluña. Análisis de los referentes legales. *Bordón. Revista de Pedagogía*, 66(4).
- Junta de Andalucía (2014) Orden de 31 de julio de 2014, por la que se aprueba el III Plan Andaluz de Formación Permanente del Profesorado. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, 2 de septiembre de 2014 (170) pp. 9-34.
- Junta de Andalucía (2015) Anexo I, Area Matemáticas, en *Orden de 17 de marzo de 2015, por la que se desarrolla el currículo de la Educación Primaria en Andalucía*. Recuperado de <http://www.juntadeandalucia.es/educacion/descargasrecursos/curriculo-primaria/matematicas.html>.
- Junta de Castilla y León (2018) *Educacyl Portal de Educación: XIV Congreso Regional de Matemáticas en Castilla y León*. Disponible en: <https://www.educa.jcyl.es/es/congresos/xiv-congreso-regional-matematicas-castilla-leon> (Accedido: 13 05 2019).
- Junta de Castilla y León (2019) *Educacyl Portal de Educación*. Disponible en: <https://www.educa.jcyl.es/profesorado/es/formacion-profesorado/plan-autonomico-formacion-permanente-profesorado> (Accedido: 13 05 2019).
- Junta de Extremadura (2019) Educarex. Disponible en: <https://inscripciones.educarex.es> (Accedido: 13 05 2019).

- Kaiser, G. (2014). Mathematical modelling and applications in education. *Encyclopedia of mathematics education*. Springer, Dordrecht. (pp. 396-404).
- Kaput, J. J., 1999. Teaching and learning a new algebra. En: E. Fennema & T. Romberg, edits. *Mathematics classrooms that promote understanding*. Mahwah, N.J.: Erlbaum Associated, Publishers, pp. 133-155.
- Kim, H., Choi, H., Han, J., y So, H. (2012). Enhancing teachers' ICT capacity for the 21st century learning environment: three cases of teacher education in Korea. *Australasian Journal of Educational Technology*, 28(6), 965-982.
- La Rioja (2008) "Orden 9/08, de 28 de abril, de la Consejería de Educación, Cultura y Deporte, por la que se regulan las actividades de formación permanente del profesorado de los centros docentes donde se imparten enseñanzas no universitarias". *Boletín Oficial de la Rioja*, 6 de mayo de 2008 (61) pp. 3074-3084.
- Lesh, R. y Clarke, D. (2000), "Formulating operational definitions of desired outcomes of instruction in mathematics and science education", en *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*, ed. A. Kelly y R. Lesh, Lawrence Erlbaum & Associates, Mahwah, New Jersey, pp. 113-150.
- Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., y Post, T. (2000), Principles for Developing Thought-Revealing Activities for Students and Teachers, en A. Kelly y R. Lesh (eds.), *Research Design in Mathematics and Science Education*, Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, New Jersey, 591-646.
- Maaß K., Gurlitt J. (2011), LEMA – "Professional Development of Teachers in Relation to Mathematical Modelling" en *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*, vol 1, ed. G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri, G. Stillman, Springer, Dordrecht, pp. 629-639.
- Marcellán, F. (2017). Propuestas de la Real Sociedad Matemática Española para el Pacto Educativo. *La Gaceta de la RSME*, 20(2), pp. 235-242.
- MECD, (2003). Real decreto 832/2003, de 27 de junio, por el que se establece la ordenación general y las enseñanzas comunes del Bachillerato., s.l.: s.n.
- MECD, (2004). Real Decreto 116/2004, de 23 de enero, por el que se desarrolla la ordenación y se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria, Boletín Oficial del Estado (10 febrero 2004)., s.l.: s.n.

- MEC (2007). *Real Decreto 1467/2007*, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas., s.l.: s.n.
- MEC (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.
- MEC (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. , s.l.: s.n.
- MEC (2016). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín Oficial del Estado, número 5, de 5 de enero de 2007. , s.l.: s.n.
- MEFP (2019). *EDUCAbase. Enseñanzas no universitarias*. [En línea] Available at: <http://estadisticas.mecd.gob.es/EducaDynPx/educabase/index.htm?type=pcaxis&path=/Educacion/Alumnado/Matriculado/Series18/SeriesAlumnado&file=pcaxis&l=s0> [Último acceso: 10 marzo 2019].
- MEFP (2019). *Sistema Estatal de Indicadores de la Educación*. [En línea] Available at: <http://www.educacionyfp.gob.es/servicios-al-ciudadano-mecd/estadisticas/educacion/indicadores-publicaciones-sintesis/sistema-estatal-indicadores.html> [Último acceso: 10 marzo 2019].
- Ministerio de Educación y Formación Profesional (2018) “Resolución de 21 de noviembre de 2018, de la Secretaría de Estado de Educación y Formación Profesional, por la que se convocan plazas para la realización de cursos de formación en red para la formación permanente del profesorado que ejerce en niveles anteriores al universitario y del curso de formación sobre el desarrollo de la Función Directiva. Año 2019”. *Secretaría de Estado de Educación y Formación Profesional*.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014). *TALIS 2013. Estudio Internacional de la Enseñanza y el Aprendizaje. Informe Español*. Madrid: Secretaría General Técnica.
- Montejo-Gámez, J. y Amador-Saelices, M. V. (2017), ¿Cuánto cuesta emprender?: Un proyecto para aprender matemáticas desde un enfoque por competencias, en *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Libro de actas*, FESPM, Andújar, pp. 500-508.

- Naciones Unidas (2015). *Resolución aprobada por la Asamblea General del 25 de septiembre de 2015. Transformar nuestro mundo: la Agenda 2030 para el Desarrollo Sostenible*, s.l.: s.n.
- National Council of Teacher of Mathematics (NCTM) (2018) *Building STEM Education on a Sound Mathematical Foundation A joint position statement on STEM from the National Council of Supervisors of Mathematics and the National Council of Teachers of Mathematics*. Disponible en: <https://www.mathedleadership.org/docs/resources/positionpapers/NCSMPositionPaper17.pdf> (Accedido 13 05 2019).
- National Research Council, (2011). *Successful K-12 STEM Education: Identifying Effective Approaches in Science, Technology, Engineering, and Mathematics*. Washington, DC: The National Academies Press.
- Navío Gámez, A. (2005). *Las competencias profesionales del formador*. Barcelona: Ediciones Octaedro.
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
- Niss, M. (1993), “Assessment in Mathematics Education and its effects: and introduction”, en *Investigations into Assessment in Mathematics Education*, ed. M. Niss, Kluwer Academic Publisher, Aahrus, pp. 1-30.
- Niss, M. (1999). Aspects of the nature and state of research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 40(1), 1-24.
- Niss, M., y Højgaard, T. (Eds.) (2011). *Competencies and Mathematical Learning: Ideas and Inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. Roskilde: IMFUFA/NSM, Roskilde University.
- Nortes, A. y Nortes, R. (2013). Formación inicial de maestros: un estudio en el dominio de las matemáticas. Profesorado: Revista de currículum y formación del profesorado, 17(3), 185-200.
- Nortes, R. y Nortes, A. (2018). ¿Tienen los futuros maestros los conocimientos matemáticos elementales? En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñoz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García-García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 397-406). Gijón: SEIEM.

- Nortvedt, G. A. y Buchholtz, N. (2018), "Assessment in mathematics education: responding to issues regarding methodology, policy, and equity", *ZDM*, 50, pp. 555-570.
- OCDE (2002). *Conocimientos y destrezas para la vida. Primeros resultados del Proyecto PISA 2000. Resumen de resultados*. Madrid: MECD-InCE.
- OCDE (2011). *Statistics Canada Literacy for Life: Further results from the Adult Literacy and Life Skills Survey*. s.l.:OECD Publishing.
- OCDE (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: Matemáticas, Lectura y Ciencias*. Madrid: MECD.
- OCDE (2014), *Talis 2013 Results: An International Perspective on Teaching and Learning*, OECD Publishing. <http://dx.doi.org/10.1787/9789264196261-en>.
- OCDE (2018). *Marco de Competencia Global. Estudio PISA. Preparar a nuestros jóvenes para un mundo inclusivo y sostenible*. Madrid: MECD.
- OCDE (2019). International Curriculum Analysis. [En línea] Available at: <http://www.oecd.org/education/2030/international-curriculum-analysis.htm>.
- OCDE (2019). *OECD. Better policies for better lives. PISA Programme for International Student Assessment*. <http://www.oecd.org/pisa/aboutpisa/>.
- Ortega-Pons, M. (2018). Un modelo de enseñanza de la modelización para trabajar las funciones elementales con el uso de datos reales y tabletas. Tesis doctoral, Universidad de Valencia.
- País Vasco (2013) "LEY 1/2013, de 10 de octubre, de Aprendizaje a lo Largo de la Vida". Boletín oficial del País Vasco, 17 de octubre de 2013 (199), pp. 1-30
- Pajares, R., Sanz, A., Rico, L. (2000), *Aproximación a un modelo de evaluación: el informe PISA 2000*. MECD, Madrid.
- Pérez, E. S., García-Raffi, L., y Pérez, J. S. (1999). Introducción de las técnicas de modelización para el estudio de la física y de las matemáticas en los primeros cursos de las carreras técnicas. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 17(1), 119-129.
- Piaget, J. (1952). *The Child's Conception of Number*. New York: Humanities Press.
- Pickton, D. W., y Wright, S. (1998), "What's SWOT in strategic analysis?", *Strategic change*, 7(2), pp. 101-109.

- PISA, (2015). Informe Español. [En línea] Available at: <https://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pisa-2015/pisa2015preliminarok.pdf?documentId=0901e72b8228b93c>.
- Pollak, H. O. (1968). On some of the problems of teaching applications of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 1(1-2), 24-30.
- Pólya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas*. México DF: Editorial Trillas. (Reeditado de *How to Solve it*, Princeton University Press, 1954).
- Principado de Asturias (2018) “Resolución de 22 de diciembre de 2017, de la Consejería de Educación y Cultura, por la que se aprueba el Plan Regional de Formación Permanente del Profesorado 2017-2018”. *Boletín oficial del Principado de Asturias*, 4 de enero de 2018 (3).
- Principado de Asturias (2018) “Resolución de 31 de julio de 2018, de la Consejería de Educación y Cultura, por la que se aprueba la convocatoria de actividades de formación del profesorado e innovación educativa en centros docentes para el año escolar 2018-2019”. *Boletín oficial del Principado de Asturias*, 3 de septiembre de 2018 (205).
- Puig, L. (2008). Presencia y ausencia de la resolución de problemas en la investigación y el currículo. Por aparecer En *Actas del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, XIX Seminário de Investigaçao em Educação Matemática, XVIII Encontro de Investigaçao em Educação Matemática.
- Puig, L., y Cerdán, F. (1995). Problemas y problemas aritméticos elementales. En *Problemas Aritméticos Escolares*. Madrid: Síntesis. pp. 13-42.
- Ramiro i Roca, E. (2002). CEP, CEFIRE, ¿CÉFIRO? en el País Valenciano. *Conceptos de Educación*, 4. Consultado en http://www.quadernsdigitals.net/index.php?accionMenu=hemeroteca.VisualizaArticuloIU.visualiza&articulo_id=2220.
- Real Sociedad Matemática Española (RSME) (2018) Escuela Miguel de Guzmán. Disponible en: <https://www.rsme.es/category/actividades-cientificas-2/escuela-miguel-de-guzman/> (Accedido 13 05 2019).
- RedUNE (n.d.) Afectados por CREA. Disponible en: <http://afectadoscrea.org/es/comunicados-de-prensa/> (Accedido: 13 05 2019).
- Región de Murcia (2003) “Decreto nº 42/2003, de 9 de mayo, por el que se regula la planificación, estructura y organización de la formación permanente

- del Profesorado de la Región de Murcia”. *Boletín Oficial de la Región de Murcia*, 20 de mayo de 2003 (114) pp. 10003-10011.
- Región de Murcia (2013) “Orden de 12 de julio de 2013, de la Consejería de Educación, Formación y Empleo, por la que se suprimen ocho Centros de Profesores y Recursos y se establece la estructura, organización y funcionamiento del Centro de Profesores y Recursos Región de Murcia”. *Boletín Oficial de la Región de Murcia*, 19 de julio de 2013 (166) pp. 29293-29301.
- Región de Murcia (2015) MURCIA EDUCARM Portal Educativo Disponible en: www.educarm.es/plancentrodeprofesores. (Accedido 13 05 2019).
- Región de Murcia (2018) “Orden de 30 de octubre de 2018 de la Consejería de Educación, Juventud y Deportes, por la que se aprueba el Plan Trienal de Formación Permanente del Profesorado 2018-2019”. *Boletín Oficial de la Región de Murcia*, 10 de noviembre de 2018 (260) pp. 28402-28436.
- Región de Murcia (2018) “Resolución de 14 de mayo de 2018, de la dirección General de Planificación Educativa y Recursos Humanos por la que se regulan la estructura, criterios de selección de actividades, acreditación de superación y certificación de los itinerarios de formación preferentes.” *Boletín Oficial de la Región de Murcia*, 30 de mayo de 2018 (123) pp. 13782-13803.
- Región de Murcia (2018) “Resolución de la Directora General de Planificación Educativa y Recursos Humanos por la que se publica la selección definitiva de proyectos de innovación educativa aptos y no aptos para el curso escolar 2018-2019”. *Resolución interna Consejería de Educación, Juventud y Deportes*, 22 de noviembre de 2018.
- Rico, L. (1990), “Diseño Curricular en Educación matemática: Una perspectiva cultural”, en *Teoría y Práctica en Educación Matemática*, ed. S. Llinares, V. Sánchez, Editorial Alfar, Sevilla, pp. 17-62.
- Ruiz de Gauna, J., García, J., & Sarasua, J. (2013). Perspectiva de los alumnos de Grado de Educación Primaria sobre las Matemáticas y su enseñanza. *Números*. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 82, 5-15.
- Sandall, F., (2016). Report on Implementing Maths – No Problem! in Primary Schools Critical Success Factors. [En línea] Available at: <https://mathsno-problem.com/mathematics/mnpcustom/download.php?pdf=Report-on-Implementing-Maths-No-Problem.pdf>.

- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.
- Souto Gonzáles, J. M. (2002). La calidad de la enseñanza y la formación del profesorado. El caso de la Comunidad Valenciana. *Conceptos de Educación*, 4. Consultado en http://www.quadernsdigitals.net/index.php?accionMenu=hemeroteca.VisualizaArticuloIU.visualiza&articulo_id=2214.
- Souto Gonzáles, J. M. (2002). La calidad de la enseñanza y la formación del profesorado. El caso de la Comunidad Valenciana. *Conceptos de Educación*, 4. Consultado en http://www.quadernsdigitals.net/index.php?accionMenu=hemeroteca.VisualizaArticuloIU.visualiza&articulo_id=2214.
- Sowell, E. (1989). Effects of manipulative materials in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(5), 498-505. <http://dx.doi.org/10.2307/749423>.
- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. & Weber, K., (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. En: J. Cai, ed. *First compendium for research in mathematics education*. Reston, VA.
- Teitelbaum, M S. (2014) The Myth of the Science and Engineering Shortage, *The Atlantic*, 19 de marzo. Disponible en: <https://www.theatlantic.com/education/archive/2014/03/the-myth-of-the-science-and-engineering-shortage/284359/> (Accedido 13 05 2019).
- TIMSS, (2011). International Results in Mathematics. [En línea] Available at: <https://timssandpirls.bc.edu/timss2011/international-results-mathematics.html>.
- TIMSS, (2015). Informe Español. [En línea] Available at: <https://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/timss2015final.pdf?documentId=0901e72b822be7f5>.

- TIMSS, (2015). International Results in Mathematics. [En línea] Available at: <http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/international-results/wp-content/uploads/filebase/full%20pdfs/T15-International-Results-in-Mathematics.pdf>.
- Treffers, A. (1987). *Three dimensions (a model of goal and theory description in mathematics instruction - the Wiskobas Project)*. Dordrecht: D. Reidel.
- UNESCO, 2015, *La política de la evaluación de la UNESCO*, UNESCO, París. Recuperado de https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000253907_spa/PDF/253907spa.pdf.multi.
- Universidad de Cantabria (n.d.) Centro Internacional de Encuentros Matemáticos (CIEM) Disponible en <https://www.ciem.unican.es/> (Accedido 13 05 2019).
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (1996), “Assessment and realistic mathematics education”, CD-β Press / Freudenthal Institute, Utrecht University, Utrecht.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. y Drijvers, P. (2014). Realistic mathematics education. En S. Lerman (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 521-525). Amsterdam: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8>.
- Varquero, A., (2018). Recomendaciones internacionales para la mejora de competencias en educación obligatoria en España. *Avances en Supervisión Educativa*, Issue 29, p. <https://doi.org/10.23824/ase.v0i29.613>.
- Villani, C. & Torossian, Ch., (2018). 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques. [En línea] Available at: http://cache.media.education.gouv.fr/file/Fevrier/19/0/Rapport_Villani_Torossian_21_mesures_pour_enseignement_des_mathematiques_896190.pdf.
- Xunta de Galicia. Consellería de Cultura , Educación e Ordenación Universitaria (2015) *Plan anual de formación del profesorado 2015/2016*. Disponible en https://www.edu.xunta.gal/portal/sites/web/files/plananual_2015_2016.pdf (Accedido: 13 05 2019).
- Xunta de Galicia. Consellería de Educación, Universidades e Formación Profesional (2019) *fprofe: Formación del profesorado*. Disponible en: <https://www.edu.xunta.es/fprofe/preparaConsultaPublica.do> (Accedido: 13 05 2019).
- Yerushalmy, M. (2005). Functions of interactive visual representations in interactive mathematical textbooks. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 10, pp. 217–249.

6. ANEXO: PLANES DE FORMACIÓN DE COMUNIDADES AUTÓNOMAS¹³

Cada comunidad autónoma crea unos planes de formación dirigidos a profesorado en activo, en los cuales se marcan unas líneas prioritarias y se ofertan una serie de acciones formativas gratuitas. Por regla general, existen centros o institutos de formación, que pueden estar organizados en red o no, desde los cuales se coordinan las acciones. En numerosas ocasiones aparecen ligados al concepto de innovación. En los siguientes epígrafes se recogen las tendencias en la oferta específica de Matemáticas o en las que se encuentra de forma implícita (es el caso de la forma de trabajo STEAM: *Science, Technology, Engineering, Arts and Mathematics*) durante los primeros años del siglo XXI.

Comunidad de Madrid

Regulada por el Decreto 120/2017 (Comunidad de Madrid, 2017) y la Orden 2453/2018 (Comunidad de Madrid, 2018), incorporan el concepto de innovación y adoptan la denominación de formación permanente. Los planes de formación se encuentran publicados en la web (Consejería de Educación e Investigación de la Comunidad de Madrid, 2019), y también toda la oferta formativa desde el 2008 hasta el 2018. Se organizan en una red de centros territoriales y uno regional. La oferta formativa de Matemáticas en primaria es abundante (por ejemplo, 39 cursos en el centro territorial Capital), pero en secundaria la oferta es escasa y no se suelen impartir por falta de inscripción (por ejemplo, de 11 cursos en el centro territorial Capital, se anularon 9 por este motivo). La excepción la constituyen algunos cursos impartidos por profesorado universitario de la Universidad Autónoma de Madrid.

País Vasco

Se halla regulada en la Ley 1/2013, de 10 de octubre, de Aprendizaje a lo Largo de la Vida (País Vasco, 2013). Se pueden encontrar publicadas en línea dos convocatorias, la del curso 2017-2018 y la del 2018-2019. No hay histórico de años anteriores. Se llama Prest Gara (Departamento de Educación del País Vasco, 2019a) y contiene un programa especial STEM (Departamento

¹³ El orden de las Comunidades es el mismo que en la tabla 4.

de Educación del País Vasco, 2019a), dentro de la formación en centros. Hay unos 16 cursos relacionados directamente con las matemáticas, en ambas convocatorias.

Castilla-La Mancha

En el Decreto 78/2005 del Diario Oficial de Castilla-La Mancha (2005) se reguló la formación permanente del profesorado en esta comunidad. Aunque mediante otro decreto (Castilla-La Mancha, 2012), aduciendo falta de recursos económicos, se simplificó la red por estar demasiado atomizada y abogaron por la formación *online*. En su página web no hay ninguna referencia a cursos específicos de matemáticas. Hay, no obstante, en el curso 2017-2018 (Consejería de Educación, Cultura, Deportes y Juventud de Castilla-La Mancha, 2019) unos itinerarios de didáctica matemática dentro de cultura digital (para primaria, uno de iniciación y otro medio; en secundaria hay uno; y en infantil hay otro. También hay dos rutas, en ambos niveles, donde se promociona que la robótica ayuda a crear entornos de aprendizaje de las matemáticas, la ciencia y la tecnología). En el congreso EIAFE (Zaragoza, 2019) tuvo lugar una ponencia (Molero et al., 2019) en la que se señaló la necesidad del pensamiento crítico y se proponía el desarrollo de competencias STEAM, poniendo especial énfasis en la ‘A’ de ‘arte’ (no en la ‘M’ de ‘matemáticas’).

Principado de Asturias

En el plan regional de formación 2017-2018 (Principado de Asturias, 2018), hay dos líneas de formación en las que se podrían enmarcar acciones formativas relacionadas con las matemáticas: Actualización científica y didáctica y Actualización en didácticas específicas. En el plan regional de 2018-2019 (Principado de Asturias, 2018), parece que cambia el modelo y ya no aparecen estas líneas de formación. Sin embargo, dentro de lo que llaman “Proyectos de Actividad de Formación Común” hay un plan STEAM (Consejería de Educación y Cultura del Gobierno del Principado de Asturias, 2019). Las matemáticas únicamente se citan de manera explícita para hacer alusión al significado de la ‘M’ en las siglas STEAM. En cambio, sí se marcan como contenidos “Espacios para tocar y experimentar: rincones de ciencia” y “Utilidades en educación basadas en la programación y la robótica”. También aparece un proyecto titulado “El aprendizaje inspirado en juego”, que podría hacer pensar en la aparición de matemáticas

como eje vertebrador (teoría de juegos), pero en el cual aparece como tutor un *coaching* empresarial que organiza experiencias de gamificación sin ninguna relación con las matemáticas. En primaria, la única opción para el profesorado que quiera formarse en la enseñanza de Matemáticas son cursos sobre ABN, tanto en centros de infantil y primaria (Consejería de Educación y Cultura del Gobierno del Principado de Asturias: CPR Avilés Occidente, 2018), como en cursos aislados en niveles de iniciación (Consejería de Educación y Cultura del Gobierno del Principado de Asturias: CPR Avilés Oriente, 2018a) y profundización (Consejería de Educación y Cultura del Gobierno del Principado de Asturias: CPR Avilés Oriente, 2018b).

Castilla y León

El plan autonómico consta de varias líneas prioritarias, de las cuales una es actualización científica y didáctica. Entre las competencias no se contempla la matemática, pero sí la científica. El profesorado puede buscar la oferta formativa a través de una plataforma (Junta de Castilla y León, 2019), pero también puede elaborar, bien en su centro o bien como grupo de diferentes centros, su propio plan de formación. De entre todos los cursos ofertados encontrados en web, hay 162 sobre ABN. Respecto a convocatorias especiales para formación a distancia, únicamente hay dos cursos relacionados con las matemáticas: “Iniciación a Latex para la edición de fórmulas” e “Iniciación a Geogebra para la enseñanza de las Matemáticas”. Una grata sorpresa es que la Asociación Miguel de Guzmán, formada por las cuatro universidades públicas de Castilla y León, y la Consejería de Educación organizan congresos regionales bienales para profesorado de Matemáticas. En el 2018 se celebró el decimocuarto congreso (Junta de Castilla y León, 2018), junto a la tercera jornada Geogebra, lo que significa que se organizan este tipo de congresos desde 1990. Sin embargo, solo hay información sobre los cuatro últimos: 2012, 2014, 2016 y 2018.

Andalucía

Los planes de formación del profesorado duran varios años. Tanto en el II plan (Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía, 2002) como en el III plan (Junta de Andalucía, 2014), no se observan referencias explícitas a las matemáticas ni a STEAM. En la búsqueda de las actividades registradas en su plataforma, bajo el descriptor “2.2.-Actualización didáctica de las

Matemáticas” se encuentran 242, entre cursos, talleres, grupos de trabajo, encuentros y formación en centros. De estos, 150 son de ABN. Hay que destacar que, en el caso de la etapa de infantil, de 55 cursos, 46 son de ABN.

Cantabria

Tal y como explican en la página web de la Consejería de Educación, Cultura y Deporte de la Comunidad de Cantabria, el Plan Regional de Formación Permanente del Profesorado constituye el marco y el referente para dicha formación en la Comunidad Autónoma de Cantabria durante el período 2015-2019 (2015). Cada curso escolar, Cantabria elabora un plan, llamado de acciones formativas en 2015-2016, y Anual de Formación Permanente del Profesorado en 2017-2018 (2017) y 2018-2019 (2018). Del plan del curso 2016-2017 no se ha encontrado información. Antes del 2015 también había planes anuales que se llamaban Regional de Formación Permanente del Profesorado, como el del curso 2014-2015 (2014). En este último se recogía explícitamente la implantación de planes de mejora de la competencia matemática, al igual que ocurría con la competencia lingüística, tanto en las finalidades como en las líneas de actualización científica y didáctica y de tratamiento de la información y competencia digital, aun a través de acciones formativas sobre ABN. No obstante, la presencia de las matemáticas disminuyó de forma alarmante en los planes anuales de los siguientes cursos académicos. En el curso 2015-2016 solo se programaron seis cursos sobre competencias matemáticas, dos de ellos de ABN, sin ninguna referencia general. En el curso 2017-2018 (para el curso anterior no hay información disponible) hubo tres acciones formativas en torno a las matemáticas, aunque ninguna relacionada con ABN; además, cuando se habla de competencias matemáticas, se engloban con las de ciencia y tecnología. Y, por último, en el plan del curso 2018-2019, no se hace referencia a las competencias matemáticas en ningún momento, pero sí a las lingüísticas, a las científicas y a las emociones, aunque incorporan dos cursos sobre matemáticas manipulativas (primaria) y sobre nuevos enfoques metodológicos en la enseñanza de las Matemáticas (secundaria). Entre las entidades colaboradoras se encuentra la Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria.

Galicia

Los planes de formación son anuales. Durante el curso 2015-2016 (2015) se organizaron tres cursos sobre matemáticas y cinco relacionados con el ámbito

científico, tecnológico y matemático. En los años siguientes cambia el modelo y las matemáticas solo aparecen asociadas a iniciativas formativas en el ámbito STEM. El buscador de cursos (2019) ni siquiera ofrece la opción de buscar por especialidad. Se realiza la búsqueda bajo el descriptor de “*Especialista en su materia*” y se revisa uno por uno cada curso para ver si es de la especialidad propia. En este año hay 159 cursos bajo este epígrafe y solo dos cursos relacionados con las matemáticas. En el descriptor “*Investigador/a e innovador/a*” aparecen entre 81 cursos; dos de matemáticas, de los cuales uno de ellos es de ABN.

Cataluña

La tendencia plasmada en los planes de formación de esta comunidad en los últimos dos años ha sido la adopción de metodologías reflexivas y centradas en los proyectos de centro, alejándose de las propuestas basadas en cursos aislados y actualización de conocimientos individuales (Jarauta Borrasca et al., 2014). No obstante, la oferta de formación del curso 2018-2019 recogida en la página web de la Xarxa Telemàtica Educativa de Catalunya (2019) agrupa, bajo el descriptor “*Matemàtiques*”, 349 acciones formativas relacionadas con esta materia. De ellas, 31 están relacionadas con STEM o STEAM. Las modalidades de estas acciones son variadas: talleres, asesoramiento, cursos, grupos de trabajo, seminarios, conferencias, jornadas, intercambio de experiencias, visitas pedagógicas o encuentros. Destaca también el repositorio de recursos didácticos que cuenta con un bloque dedicado a las matemáticas ordenado por ramas: geometría, análisis, estadística... También están disponibles en abierto, en el repositorio Ateneu.xtec.cat (n.d.), los materiales de cursos e itinerarios de formación en centros de años anteriores. Son interesantes las guías para mejorar las competencias matemáticas del alumnado a través de la práctica reflexiva y la formación del profesorado de todo un centro educativo. Es interesante asimismo el curso ARAMAT: Ara Matemàtiques. Saber-ne més per ensenyar-les millor (Ahora Matemáticas. Saber más para enseñarlas mejor) para las etapas de infantil y primaria.

Comunidad Valenciana

El Decreto 231/1997 regula la creación, estructura y funcionamiento de los Centros de Formación, Innovación y Recursos Educativos de la Comunidad Valenciana (CEFIRE). Los antiguos centros de profesores CEP (cuya creación

data de 1985: Decreto 12/1985) fueron reconvertidos (Souto Gonzáles, 2002; Beltrán Llavador, 2000) y algunos de ellos fueron desapareciendo a lo largo de los años (Ramiro i Roca, 2002). Por fin, en 2012, se desarrolló el decreto sobre los CEFIRE a través de las órdenes 64/2012 y 65/2012. Estos espacios contaban con asesorías especializadas, entre las cuales se encontraban las de matemáticas. Desde el 2005 con convocatoria de puestos de trabajo para asesorías de CEFIRE (Resolución del 24 de mayo de 2005), desaparecen para formar parte de una única asesoría de ámbito científico o tecnológico. La consecuencia es que, según el profesor o profesora encargada de esta tarea, la programación y promoción de actividades estaba más o menos sesgada en torno a su especialidad. Las personas encargadas de la asesoría dejaron de ser ponentes y diseñadoras de la formación para ejercer tareas administrativas y contratar servicios externos o de entidades colaboradoras. Los criterios de selección de personal externo no están claros al no tratarse de especialistas en todas las materias, y eso propicia la aparición en el sistema de pedagogías y metodologías no contrastadas por la investigación, como en el caso general de las comunidades de aprendizaje (RedUNE-Afectados por CREA, n.d.) o en el particular de la formación masiva en ABN (AMCA, 2019). En la Resolución del 5 de agosto de 2016 se crean tres CEFIRE territoriales más y seis específicos que se unen al ya existente de Formación Profesional, ampliando la red CEFIRE (2018) y cambiando el modelo de formación existente hasta la fecha dando también importancia a la formación específica por especialidad. Entre ellos, el CEFIRE de ámbito Científico Tecnológico y Matemático, CEFIRE CTEM (2019), que contempla en su misma denominación a las Matemáticas, contando con cinco asesorías especialistas en esta materia y una línea de formación sobre didáctica de las matemáticas. En los planes anuales de formación desde el 2012 hasta el 2017, no se hace referencia explícita a las Matemáticas, sin embargo en el último de 2019 (Resolución 20 de julio de 2018) se recogen una serie de actuaciones específicas en la materia. Este hecho supone una diferencia respecto a las tendencias del resto de comunidades autónomas, que priorizan la formación generalista en metodologías y actuaciones centradas en el propio centro por encima de la formación por especialidad.

Extremadura

La formación permanente del profesorado se estructura en torno a un plan marco de carácter plurianual (Orden del 25 de noviembre de 2016), que a su

vez depende del Decreto 69/2007 que regula todo el sistema. En él se establece como eje de la formación permanente del profesorado, el centro educativo. No es extraño, por lo tanto, que en los 18 centros de formación del profesorado (CPR) se organizaran para el curso 2018-2019 (Educarex, 2019) únicamente cinco formaciones en centros de primaria e infantil en ABN, dos en el método de Singapur para los mismos niveles, dos sobre ajedrez concentrados en un CPR y uno sobre Geogebra.

Región de Murcia

En esta comunidad, la formación permanente del profesorado está regulada por el Decreto del 9 de mayo de 2003. En la Orden del 12 de julio de 2012, se suprimen los ocho CPR, dejando uno de carácter general, aduciendo “alto grado de eficiencia dentro del actual marco de austeridad y contención del gasto público”. En la Resolución del 25 de julio de 2013, se crean ocho extensiones de este único centro. El último plan trienal de formación permanente del profesorado (Orden 30 de octubre de 2018), contempla entre sus líneas prioritarias el desarrollo de las competencias matemáticas. Dice textualmente:

Por lo que se refiere a la competencia en matemáticas, la formación del profesorado deberá proporcionar las estrategias y las herramientas necesarias para programar, desarrollar y evaluar actividades capaces de contribuir al desarrollo en el alumnado de las capacidades de utilizar los números y las operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y el razonamiento matemático para producir e interpretar informaciones, para conocer más sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad y para resolver problemas relacionados con la vida diaria y el mundo laboral.

Sin embargo, las actividades de formación, en el curso 2017-2018, relacionadas con esta competencia se reducen a una breve mención en los itinerarios de Formación Preferentes (Resolución 14 de mayo de 2018) relacionados con actualización didáctica (hay itinerarios propios para TIC, competencia lingüística y competencia científica), un proyecto de innovación (Región de Murcia, 2018) sobre las matemáticas en los cuadernos de ABP, y ocho acciones formativas (Educarm, 2018) de diversos formatos como grupos de trabajo, seminarios o cursos.

Canarias

Al igual que en otras comunidades autónomas, Canarias también sufrió la eliminación de varios de sus CEP en 2012 (Orden del 23 de julio de 2012). El modelo canario establece un plan trienal que se concreta anualmente en los centros o en acciones específicas. En el trienio anterior, 2015-2018 (Plan de formación de Canarias, 2015), no hay ninguna referencia a la formación en Matemáticas, ni en itinerarios ni en las guías docentes o en el plan de formación, sin embargo, sí hay referencias a competencias lingüísticas y TIC, que aparecen como líneas estratégicas. En cuanto a los seminarios (Gobierno de Canarias, 2018), hay nueve en torno a las matemáticas, seis de ellos coordinados por la Sociedad de Profesorado de Matemáticas “Newton” de Canarias. Pese a ello, únicamente hay un grupo de trabajo que incluye las Matemáticas. Como acciones puntuales en cada CEP de las islas, para el curso 2018-2019 tres cursos de ABN y uno sobre matemáticas manipulativas. Los centros también colaboran en las jornadas OAOA¹⁴ organizadas por la asociación de este movimiento de las islas.

Aragón

El modelo de formación del profesorado en Aragón se estructura en torno a los Centros de Innovación y Formación Educativa (CIFE) en el DECRETO 105/2013. Dicho decreto establece que se deberá tener un plan marco de formación del profesorado de carácter cuatrienal. En el plan correspondiente a 2016-2019 (Orden ECD/309/2016), no hay ninguna referencia en las líneas estratégica a la formación en Matemáticas. Cada CIFE debería tener su propio plan de actuación, pero en muchos casos no se encuentra disponible, ya que las páginas web de cada uno son diferentes y no parecen tener carácter institucional. Tampoco hay acceso a los planes de formación en centros. En el CIFE Ana Abarca de Bolea (ver web) hay propuestas para el año académico 2018-2019, como cursos de ABN e incluso jornadas, orientadas a infantil y primaria. Sin embargo, en 2016-2017, no existía esta oferta y en su lugar se podían encontrar cursos denominados “Primavera matemática”. Hay tres

¹⁴ Son las siglas de Otros Algoritmos para las Operaciones Aritméticas y representan un movimiento que pretende revolucionar la enseñanza de las matemáticas haciéndolas accesibles para todos.

CIFE específicos, en inclusiva, FP y lenguas, pero no hay nada sobre ciencia, tecnología y matemáticas.

Islas Baleares

En esta comunidad, el modelo de formación comprende un plan cuatrienal (Resolución 16 de marzo de 2016), en el que se especifican las líneas de actuación en el diseño de acciones formativas. Desde el 2004 hasta el 2016, los planes no hacían ninguna referencia a las Matemáticas. En cambio, en el plan 2016-2020, dentro de una la línea estratégica 7, se recoge uno de los contenidos que dice: “Formación para la actualización y mejora de los procedimientos y aprendizajes de carácter científico y matemático”. Cada CEP programa acciones formativas en base a una detección de necesidades de los centros. Las acciones relacionadas con las matemáticas han ido disminuyendo con el tiempo. Por ejemplo, en 2014-2015 (Weib, n.d.), se programaron 15 actividades matemáticas. En cambio, los CEP, durante el curso 2018-2019, ofertaban una media de una o dos actividades relacionadas con las matemáticas.

Navarra

En Navarra se elabora un plan anual de formación del profesorado (ver web) y los Centros de Apoyo al Profesorado (CAP, hay 5) se encargan de llevarlo a la práctica. No hay ninguna referencia a las Matemáticas, excepto en los descripciones de la búsqueda de acciones formativas. Para el curso 2018-2019 solo había dos cursos en inscripción sobre matemáticas: un seminario sobre metodologías activas en el ámbito matemático para infantil y primaria, y un curso sobre, también metodologías activas, para el tratamiento de la estadística en secundaria y bachillerato. En el plan de formación aparecen más cursos y seminarios, pero sin fecha de realización: dos cursos, uno de ellos sobre nivel avanzado de ABN y otro sobre matemáticas divertidas; y seis seminarios, tres de ellos sobre el método OAOA.

La Rioja

En La Rioja únicamente hay una normativa que regula las actividades de formación permanente del profesorado y su certificación, la Orden 9/08. El Centro de Innovación y Formación Educativa (CIFE) (larioja.org) es el único, no tiene página web, pero sí cuenta de Twitter (@cifelarioja). No hay asesorías específi-

cas. Entre todos los cursos ofertados, tanto en convocatoria, como en proceso o finalizados, durante el curso 2018-2019, únicamente había tres sobre ABN en infantil, uno sobre metodologías activas y uno sobre pensamiento computacional. No hay proyectos especiales de innovación en ámbito científico, tecnológico o matemático, lo cual contrasta con los tres en marcha relacionados con la lectura y el aprendizaje de las lenguas.

Ceuta

En esta comunidad hay planes de formación anuales que se pueden consultar en la página (2019) del Ministerio de Educación y Formación Profesional. En los planes de los cursos 2015-2016 y 2016-2017, se contemplaba dentro de las líneas prioritarias la cultura científica justificándola de la siguiente manera:

Para conseguir el progreso socioeconómico del país, la empleabilidad de sus ciudadanos y una participación crítica y activa de todos sus miembros es imprescindible contar con una sociedad científicamente competente. El Consejo de la Unión Europea, en el marco estratégico 2020, “ET 2020” propone hacer más atractivas las **matemáticas**, la ciencia y la tecnología y reforzar su enseñanza. El aumento de la motivación de los estudiantes y su interés por las ciencias también incrementará el número de vocaciones científicas.

Sin embargo, en los planes de los cursos posteriores, desaparece esta línea, y solo hay programados cursos de ABN. Para el curso 2018-2019, el plan de formación anuncia tres acciones formativas, una relacionada con el ABN, otra sobre pensamiento computacional y una que se llama “¡No mates a las mates!”, cuyo objetivo se explica con las siguientes palabras: “Este curso pretende impulsar la didáctica de las ciencias exactas a partir de la exploración de las matemáticas manipulativas y otras metodologías actuales en la enseñanza de esta materia en nuestras aulas”. Si bien esto parece un buen augurio, este curso no aparece en la convocatoria 2018-2019.

Melilla

En Melilla se elaboran anualmente los Planes Provinciales de Formación Permanente del Profesorado (Web Gobierno de España, 2019). En los planes del 2016-2017 y 2017-2018, aparece la misma referencia a las Matemáticas

que en los planes antiguos de Ceuta. La única diferencia es que la línea de actuación bajo la cual actúa es Educación CTIM (STEM). Melilla no cuenta con un centro de formación del profesorado. En su lugar aparece la Unidad de Programas Educativos (UPE). Las acciones formativas relacionadas con las matemáticas en los cursos 2016-2017 y 2017-2018 han sido dos, sobre ABN. Aunque el plan provincial del curso 2018-2019 no está disponible, se pueden consultar los cursos, seminario y grupos de trabajo a través de la página de UPE y del Ministerio. No hay ninguna actividad relacionada con las matemáticas, ni siquiera ABN.

INTEF

El Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado (INTEF), cuyo ámbito de actuación es nacional, desarrolló para el curso 2018-2019 un programa orientado al pensamiento computacional, una tendencia que se ubica a medio camino entre la programación y las matemáticas. Su relación con las matemáticas se encuentra en el desarrollo de pensamiento lógico-matemático para reconocer y reproducir secuencias que pueden servir para programar robots que actúan para dar solución a un problema.

El informe *Programación, robótica y pensamiento computacional en el aula. Situación en España y propuesta normativa* (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2018) realiza un análisis de las propuestas por comunidades autónomas y propone la inclusión del pensamiento computacional y la robótica en el currículo al mismo nivel que otras asignaturas como las Matemáticas y la Lengua Castellana y Literatura. Si bien en aquellas comunidades autónomas se reconoce la importancia del pensamiento computacional en el ámbito de las matemáticas, la propuesta normativa no hace ninguna referencia expresa a las matemáticas y los objetivos se redactan en base a las competencias en programación informática.

El INTEF también gestiona los cursos de formación en red del Ministerio de Educación y Formación Profesional, que se ofertan todos los años desde el 2013. En la convocatoria del 2014, la tercera, se ofertó el curso “Recursos educativos abiertos para la enseñanza de las Matemáticas” (2014). A pesar de reconocer en el blog sobre estos cursos (2014) que se había formado una comunidad de aprendizaje para la creación de recursos educativos abiertos para las matemáticas, se decidió no seguir ofertándolo. En la convocatoria del 2015, tres de los cursos se

habían agrupado en uno: “Creación de Recursos Educativos Abiertos para la enseñanza de las Matemáticas, las Ciencias y la Tecnología” (2015), sobre el cual no hay información disponible. En las convocatorias posteriores, hasta el 2019 (Resolución 21 de noviembre de 2018, Secretaría de Estado de Educación y Formación Profesional), no hay oferta para Matemáticas específicamente.